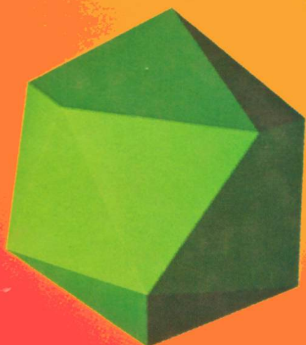
GEOMETRIJA









10 - 12

GEOMETRIJA

Vadovėlis
X–XII klasei



Kaunas „Šviesa“ 1999

UDK 513(075.3)
Ge263

ГЕОМЕТРИЯ
Учебник для 10—11 классов средней школы
Издание подготовлено под научным руководством академика *А. Н. Тихонова*
Авторы: *Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселева, Э. Г. Позняк*
Москва, «Просвещение», 1992
ISBN 5-09-003870-8

Autoriai:
L. Atanasianas, V. Butuzovas, S. Kadomcevas, L. Kiseliova, E. Pozniakas

Iš rusų kalbos vertė **Petras Vaškas**

Redaktorė **Nijolė Ramanauskienė**

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti 1999 05 27, Nr. 162

5-asis leidimas

ISBN 5-430-02794-4

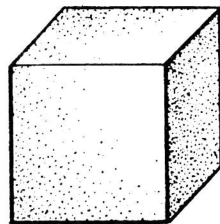
ĮVADAS

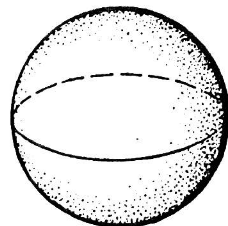
1. Stereometrija. Mokyklinį geometrijos kursą sudaro dvi dalys: planimetrija ir stereometrija. Planimetrija nagrinėja vienoje plokštumoje esančių geometrinių figūrų savybes. *Stereometrija yra geometrijos dalis, nagrinėjanti erdvinių figūrų savybes.* Žodis „stereometrija“ kilęs iš graikiškų žodžių „stereos“ — erdvinis ir „metreō“ — matuoju.

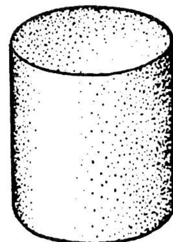
Paprasčiausios (galima sakyti, pagrindinės) figūros erdvėje yra *taškaĩ, tiẽsės* ir *plókštumos*. Kartu su šiomis figūromis nagrinėsime ir vadinamuosius *geomètrinius kū̃nus* bei jų *paviršiùs*. Geometrinių kūnų vaizdinius suformuoja konkretūs daiktai. Pavyzdžiui, kalbėdami apie kristalų formą, įsivaizduojame geometrinius kūnus, kurių paviršiai sudaryti iš daugiakampių. Tokie paviršiai vadinami *briaunaĩniais*. Vienas paprasčiausių briaunainių yra *kubas* (1 pav., *a*). Nesvarūs skysčio lašai yra geometrinio kūno — *rùtulio* — formos (1 pav., *b*). Tokia pat ir futbolo kamuolio forma. Konservų dėžutė yra geometrinio kūno — *rìtinio* — formos (1 pav., *c*).

Geometriniai kūnai, kaip ir apskritai geometrinės figūros, yra tik įsivaizduojami objektai. Tuo jie skiriasi nuo realių daiktų. Įsivaizduojame, kad geometrinis kūnas yra erdvės dalis, kurią nuo visos kitos erdvės dalies skiria paviršius — to kūno *krãštas*. Pavyzdžiui, rutulio kraštas yra *sfera*, o ritinio kraštą sudaro du skrituliai — ritinio pagrindai ir šoninis paviršius.

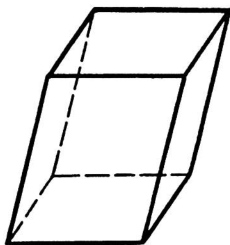
Nagrinėdami geometrinių figūrų — įsivaizduojamų objektų — savybes, susidarome realių daiktų geometrinių savybių (tų daiktų formos, tarpusavio padėties ir t. t.) vaizdą, tomis savybėmis galime praktiškai pasinaudoti. Tokia yra geometrijos praktinė (taikomoji)

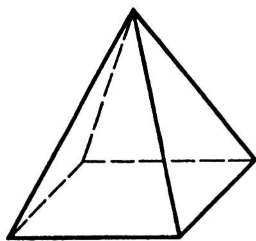

a) Kubas.

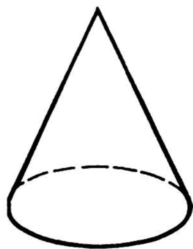

b) Rutulys.


c) Ritinys.

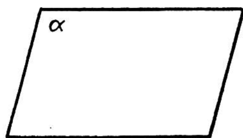
1 pav.


a) Gretasienis.

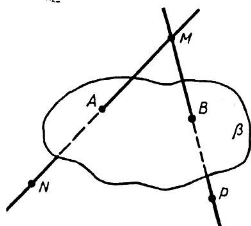

b) Piramidė.


c) Kūgis.

2 pav.



a)



b)

3 pav.

reikšmė. Geometrija, skyrium imant, stereometrija, taikoma statyboje, architektūroje, mašinų gamyboje, geodezijoje, daugelyje kitų mokslo ir technikos sričių.

Nagrinėjant erdvines figūras, skyrium imant, geometrinius kūnus, panaudojami jų atvaizdai paveiksle. Erdvinės figūros atvaizdas dažniausiai yra jos projekcija kurioje nors plokštumoje. Galimi ir kitokie atvaizdai. Paprastai pasirenkamas tas figūros atvaizdas, iš kurio galima susidaryti teisingą figūros formos vaizdinį, pagal kurį patogiausia nagrinėti figūros savybes. 2 paveiksle, *a, b*, pavaizduoti du briaunainiai — *gretasiẽnis* ir *piramìdė*, o 2 paveiksle, *c*, — *kū́gis*. Tų figūrų nematomosios dalys pavaizduotos brūkšninėmis linijomis. Erdvinių figūrų vaizdavimo taisyklės pateiktos 1 priede.

Šiame geometrijos kurse iš pradžių nagrinėjama tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtis, briaunainiai bei vektoriai erdvėje. Po to nagrinėjamas koordinačių metodas erdvėje, apvalieji geometriniai kūnai (ritinys, kūgis, rutulys) bei kūnų tūriai.

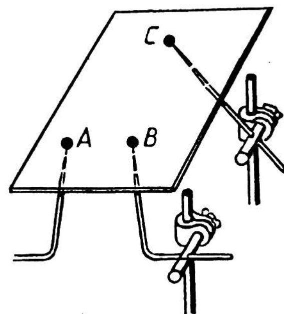
2. Stereometrijos aksiomos. Planimetrijoje pagrindinės figūros buvo taškai ir tiesės. Stereometrijoje nagrinėjama dar viena pagrindinė figūra — *plokštumà*. Plokštumos vaizdinį susidarome žiūrėdami į lygų stalo ar sienos paviršių. Plokštumą, kaip geometrinę figūrą, reikia įsivaizduoti neribotai išplitusią į visas puses.

Kaip ir anksčiau, taškus žymėsime didžiosiomis raidėmis: A, B, C ir t. t., tieses — mažosiomis raidėmis: a, b, c ir t. t. arba dviem didžiosiomis raidėmis: AB, CD ir t. t. Plokštumas žymėsime graikiškomis raidėmis: α, β, γ ir t. t. Paveiksluose plokštumą vaizduoja lygiagretainis (3 pav., *a*) arba bet kuri sritis (3 pav., *b*).

Aišku, kiekvienoje plokštumoje yra erdvės taškų, tačiau ne visi jie yra vienoje plokštumoje. 3 paveiksle, *b*, taškai A ir B yra plokštumoje β (plokštuma β eina per tuos taškus), o taškai M, N, P nėra toje plokštumoje. Trumpai rašoma šitaip: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėties pagrindines savybes išreiškia aksiomos. Į stereometrijos aksiomų sistemą įeina ir planimetrijos aksiomos. Visų aksiomų sąrašas ir keletas jų išvadų pateikta 2 priede. Čia suformuluosime tik tris taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėties erdvėje aksiomas.

A_1. *Per bet kuriuos tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, eina plokštuma, tačiau tik viena.*



4 pav. Aksiomos A_1 paaiškinimas: trys taškai *A*, *B* ir *C*, nesantys vienoje tiesėje, laiko plokštelę.

Aksiomą paaiškina modelis (4 pav.). Per tris taškus *A*, *B* ir *C* einančią plokštumą dažnai vadinsime plokštuma *ABC*.

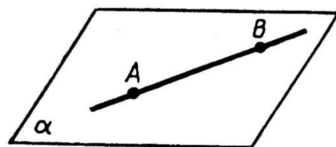
Pabrėžiame štai ką. Jei pasirinksime ne tris, o keturis bet kuriuos taškus, tai per juos gali eiti ir ne viena plokštuma. Kitaip sakant, keturi taškai gali nebūti vienoje plokštumoje. Kiekvienas žino šitokį akivaizdų to teiginio patvirtinimą: jei kėdės kojos yra nevienodo ilgio, tai kėdė stovi ant trijų kojų, t. y. remiasi į tris „taškus“, o ketvirtosios kojos galas (ketvirtasis „taškas“) nėra plokštumoje, jis pakibęs ore.

A_2. *Jei du tiesės taškai yra plokštumoje, tai visi tos tiesės taškai yra toje plokštumoje.*

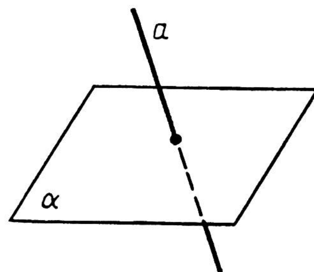
Tokiu atveju sakoma, kad *tiesė yra plokštumoje*, arba *plokštuma eina per tiesę* (5 pav., *a*).

Aksiomoje A_2 išreikšta savybe pasinaudojama braižomosios liniuotės lygumui patikrinti. Liniuotė kraštu priglaudžiama prie stalo paviršiaus. Jei liniuotės kraštas lygus (tiesus), tai visi jo taškai yra stalo plokštumoje. Jei kraštas nelygus, tai kai kuriose vietose tarp jo ir stalo paviršiaus yra tarpų.

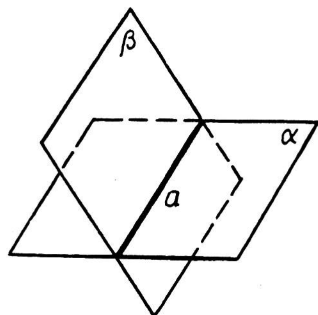
Iš aksiomos A_2 išplaukia: jei tiesė nėra plokštumoje, tai ji ir plokštuma turi ne daugiau kaip vieną bendrą tašką. Jei tiesė ir plokštuma turi vieną bendrą tašką, tai sakoma, kad jos *susìkerta* (5 pav., *b*).



a) Tiesė *AB* yra plokštumoje α.



b) Tiesė *a* ir plokštuma α susikerta.



c) Plokštumos α ir β susikerta tiese *a*.

5 pav.

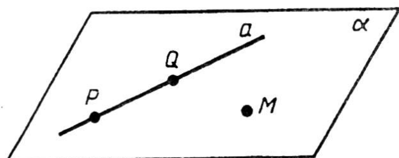
A_3. *Jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę; toje tiesėje yra visi bendri tų plokštumų taškai.*

Tokiu atveju sakoma, kad *plókštumos susìkerta tiesè* (5 pav., *c*). Aksiomą A_3 gerai vaizduoja kambario dviejų gretimų sienų arba sienos ir lubų sankirta.

Prieš pradėdami nagrinėti pateiktųjų aksiomų išvadas, pabrėžiame vieną svarbią savybę, kuria ateityje pasinaudosime. Erdvėje yra be galo daug plokštumų. Kiekvienai plokštumai tinka visos planimetrijos aksiomos ir teoremos. Dar daugiau, iš planimetrijos žinomi trikampių lygumo bei panašumo požymiai tinka ir skirtingose plokštumose esantiems trikampiams (žr. 2 priedą).

3. Keletas aksiomų išvadų

T e o r e m a. ***Per tiesę ir joje nesantį tašką eina plokštuma, tačiau tik viena.***

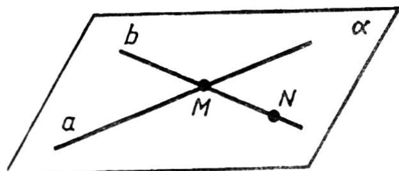


6 pav.

Į r o d y m a s. Sakykime, *a* — nagrinėjamoji tiesė, *M* — taškas, nesantis tiesėje *a* (6 pav.). Pirma įrodysime, kad per tašką *M* ir tiesę *a* eina plokštuma. Tiesėje *a* pasirinkime du taškus: *P* ir *Q*. Taškai *M, P* ir *Q* yra ne vienoje tiesėje, todėl per tuos taškus eina tam tikra plokštuma α (remiamės aksioma A_1). Kadangi $P \in \alpha$, $Q \in \alpha$, tai pagal aksiomą A_2 plokštuma α eina per tiesę *a*.

Dabar įrodysime, kad per tašką *M* ir tiesę *a* eina tik viena plokštuma. Jei plokštuma eina per tašką *M* ir tiesę *a*, tai ji eina per taškus *P* ir *Q*. Tokia plokštuma sutampa su plokštuma α, nes pagal aksiomą A_1 per taškus *M, P* ir *Q* eina tik viena plokštuma. Teorema įrodyta.

T e o r e m a. ***Per dvi susikertančias tieses eina plokštuma, tačiau tik viena.***



7 pav.

Į r o d y m a s. Nagrinėkime tieses *a* ir *b*, susikertančias taške *M* (7 pav.). Įrodysime, kad per tas tieses eina plokštuma, tačiau tik viena.

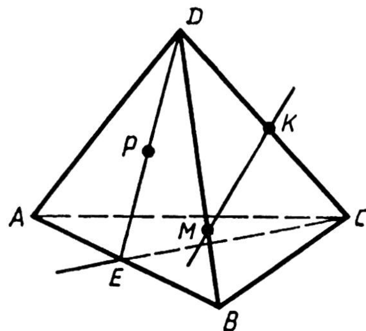
Tiesėje *b* pasirinkime kurį nors tašką *N*, nesutampantį su tašku *M*. Išnagrinėki-

me plokštumą α, einančią per tašką N ir tiesę a. Kadangi tiesės b du taškai yra plokštumoje α, tai plokštuma α eina per tiesę b (remiamės aksioma A_2). Taigi plokštuma α eina per tieses a ir b.

Įrodysime, kad per tieses a ir b eina tik viena plokštuma. Kiekviena plokštuma, einanti per tieses a ir b, eina per tašką N. Ji sutampa su plokštuma α, nes per tašką N ir tiesę a eina tik viena plokštuma. Teorema įrodyta.

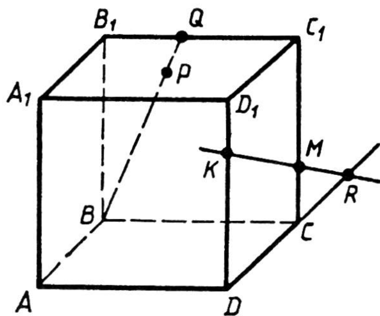
Klausimai ir uždaviniai

1. Išvardykite (8 pav.): a) plokštumas, kuriose yra tiesės *PE, MK, DB, AB, EC*; b) tiesės *DK* ir plokštumos *ABC*, tiesės *CE* ir plokštumos *ADB* susikirtimo taškus; c) taškus, esančius plokštumose *ADB* ir *DBC*; d) plokštumų *ABC* ir *DCB, ABD* ir *CDA, PDC* ir *ABC* susikirtimo tieses.



8 pav.

2. Išvardykite (9 pav.): a) taškus, esančius plokštumose DCC_1 ir BQC; b) plokštumas, kuriose yra tiesė AA_1; c) tiesės MK ir plokštumos ABD, tiesių DK bei BP ir plokštumos $A_1B_1C_1$ susikirtimo taškus; d) plokštumų AA_1B_1 ir ACD, PB_1C_1 ir ABC susikirtimo tieses; e) tiesių MK ir DC, B_1C_1 ir BP, C_1M ir DC susikirtimo taškus.



9 pav.

3. Ar teisingi šie teiginiai: a) bet kurie trys taškai yra vienoje plokštumoje; b) bet kurie keturi taškai yra vienoje plokštumoje; c) bet kurie keturi taškai nėra vienoje plokštumoje; d) per bet kuriuos tris taškus eina plokštuma, tačiau tik viena?

4. Taškai *A, B, C* ir *D* yra ne vienoje plokštumoje. a) Ar kurie nors trys tų taškų gali būti vienoje tiesėje? b) Ar tiesės *AB* ir *CD* gali susikirsti? Atsakymus pagrįskite.

5. Įrodykite, kad per tris taškus, esančius vienoje tiesėje, eina plokštuma. Kiek yra tokių plokštumų?

6. Trys taškai paporiui sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad visos atkarpos yra vienoje plokštumoje.

7. Dvi tiesės susikerta taške M. Įrodykite, kad visos tiesės, neinančios per tašką M ir kertančios tas tieses, yra vienoje plokštumoje. Ar yra vienoje plokštumoje visos tiesės, einančios per tašką M?

8. Ar teisingi teiginiai: a) jei du apskritimo taškai yra plokštumoje, tai ir apskritimas yra toje plokštumoje; b) jei trys apskritimo taškai yra plokštumoje, tai ir apskritimas yra toje plokštumoje?

9. Lygiagretainio dvi gretimos viršūnės ir įstrižainių susikirtimo taškas yra plokštumoje α. Ar kitos dvi lygiagretainio viršūnės yra plokštumoje α? Atsakymą pagrįskite.

10. Ar teisingi šie teiginiai: a) tiesė yra trikampio plokštumoje, kai ji kerta dvi trikampio kraštines; b) tiesė yra trikampio plokštumoje, kai ji eina per vieną trikampio viršūnę?

11. Duota tiesė ir joje nesantis taškas. Įrodykite, kad visos tiesės, einančios per tą tašką ir kertančios tą tiesę, yra vienoje plokštumoje.

12. Taškai A, B, C, D yra ne vienoje plokštumoje. Ar susikerta plokštumos, einančios per taškus A, B, C ir A, B, D?

13. Ar dvi plokštumos gali turėti: a) tik vieną bendrą tašką; b) tik du bendrus taškus; c) tik vieną bendrą tiesę?

14. Trys tiesės eina per vieną tašką. Per kiekvienas dvi jų išvesta plokštuma. Kiek iš viso plokštumų išvesta?

15. Trys tiesės paporiui susikerta. Įrodykite, kad jos arba yra vienoje plokštumoje, arba turi bendrą tašką.

I SKYRIUS

TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS

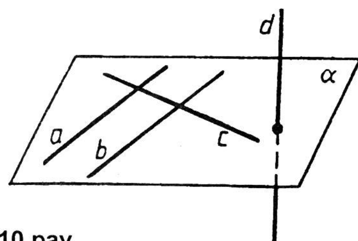
§ 1. TIESIŲ LYGIAGRETUMAS, TIESĖS IR PLOKŠTUMOS LYGIAGRETUMAS

4. Lygiagrečiosios tiesės erdvėje. Apibrėšime lygiagrečiąsias tieses erdvėje.

A p i b r ė ž i m a s. *Lygiagrečiosiomis tiesėmis erdvėje vadinamos dvi tiesės, kurios yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų.*

Tiesių a ir b lygiagretumas žymimas šitaip: $a \parallel b$. 10 paveiksle tiesės a ir b lygiagrečios, o tiesės a ir c, a ir d nelygiagrečios.

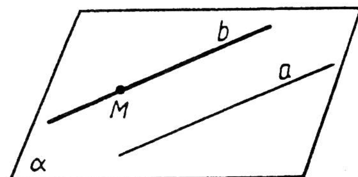
Įrodysime lygiagrečiųjų tiesių teoremą.



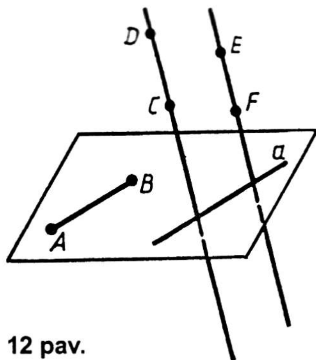
10 pav.

T e o r e m a. ***Per kiekvieną erdvės tašką, nesantį tiesėje, eina su ta tiese lygiagreti tiesė, tačiau tik viena.***

Į r o d y m a s. Sakykime, a — nagrinėjamoji tiesė, M — toje tiesėje nesantis taškas (11 pav.). Per tiesę a ir tašką M eina plokštuma, tačiau tik viena (3 skyrelis). Tą plokštumą pažymėkime raide α. Tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti su tiese a, turi būti vienoje plokštumoje su tašku M ir su tiese a, t. y. ji turi būti plokštumoje α. Iš planimetrijos kurso žinoma, kad per tašką M eina tiesė, lygiagreti su tiese a, tačiau tik viena. 11 paveiksle ta tiesė pažymėta raide b. Taigi b — vienintelė tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti su tiese a. Teorema įrodyta.



11 pav.

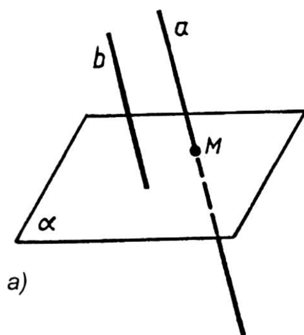


12 pav.

Toliau dažnai bus kalbama apie lygiagrečias atkarpas, lygiagrečias atkarpą ir tiesę, lygiagrečius spindulius (pustieses). *Lygiagrečiosiomis atkarpomis* vadinamos dvi atkarpos, kurios yra lygiagrečiose tiesėse. Panašiai apibrėžiamas atkarpos ir tiesės bei dviejų spindulių (pustiesių) lygiagretumas. 12 paveiksle atkarpos CD ir EF lygiagrečios ($CD \parallel EF$), o atkarpos AB ir CD nelygiagrečios; atkarpa AB lygiagreti su tiese a ($AB \parallel a$).

5. Trijų tiesių lygiagretumas. Įrodysime plokštumos ir lygiagrečių tiesių kirtimosi lemą, kurios vėliau prireiks.

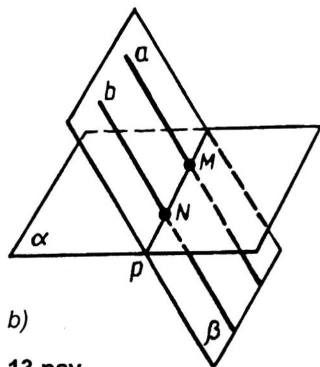
L e m à. ***Jei viena iš dviejų lygiagrečiųjų tiesių kerta plokštumą, tai ir kita tiesė kerta tą plokštumą.***



a)

Į r o d y m a s. Išnagrinėkime lygiagrečiąsias tieses a ir b, kurių viena — tiesė a — kerta plokštumą α taške M (13 pav., a). Įrodysime, kad tiesė b irgi kerta plokštumą α, t. y. su ja turi tik vieną bendrą tašką.

Raide β pažymėkime plokštumą, kurioje yra lygiagrečiosios tiesės a ir b. Kadangi dvi skirtingos plokštumos α ir β turi bendrą tašką M, tai pagal aksiomą A_3 jos susikerta tam tikra tiese p (13 pav., b). Ta tiesė yra plokštumoje β ir kerta tiesę a (taške M), todėl ji kerta su ja lygiagrečią tiesę b kuriame nors taške N. Tiesė p yra plokštumoje α, todėl N — plokštumos α taškas. Vadinasi, N — tiesės b ir plokštumos α bendras taškas.



b)

13 pav.

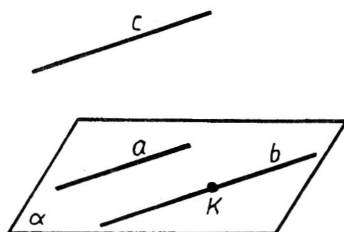
Dabar įrodysime, kad tiesė b ir plokštuma α kitų bendrų taškų neturi (tik tašką N). Tai ir reikš, kad tiesė b kerta plokštumą α. Jei tiesė b ir plokštuma α turėtų dar vieną bendrą tašką, tai ji būtų plokštumoje α, kitaip sakant, būtų plokštumų α ir β bendra tiesė, taigi sutaptų su tiese p. Tačiau taip negali būti, nes iš sąlygos žinome, kad $a \parallel b$, o tiesės a ir p susikerta. Lema įrodyta.

Iš planimetrijos kurso žinome šitokį teiginį: jei trys tiesės yra vienoje plokštumoje ir dvi iš jų lygiagrečios su trečia tiese, tai tos dvi tiesės lygiagrečios. Panašų teiginį įrodysime ir tuo atveju, kai trys tiesės yra erdvėje.

T e o r e m a. ***Jei dvi tiesės lygiagrečios su trečia tiese, tai tos dvi tiesės lygiagrečios.***

Į r o d y m a s. Sakykime, $a \parallel c$ ir $b \parallel c$. Įrodysime, kad $a \parallel b$. Tam reikia įrodyti, kad tiesės a ir b: 1) yra vienoje plokštumoje ir 2) nesusikerta.

1. Pasirinkime kurį nors tiesės b tašką, jį pažymėkime raide K. Raide α pažymėkime plokštumą, einančią per tiesę a ir tašką K (14 pav.). Įrodysime, kad tiesė b yra toje plokštumoje. Tarus, kad tiesė b kerta plokštumą α, remiantis įrodyta lema, išeitų, jog tiesė c irgi kerta plokštumą α. Kadangi $c \parallel a$, tai ir tiesė a kirstų plokštumą α, o taip negali būti, nes tiesė a yra plokštumoje α.



14 pav.

2. Tiesės a ir b nesikerta, nes priešingu atveju per jų susikirtimo tašką eitų dvi tiesės (a ir b), lygiagrečios su tiese c, o taip būti negali. Teorema įrodyta.

6. Tiesės ir plokštumos lygiagretumas. Jei du tiesės taškai yra plokštumoje, tai, remdamiesi aksioma A_2, galime teigti, kad visa tiesė yra plokštumoje. Iš čia išplaukia, kad galimi trys tiesės ir plokštumos tarpusavio padėties erdvėje atvejai:

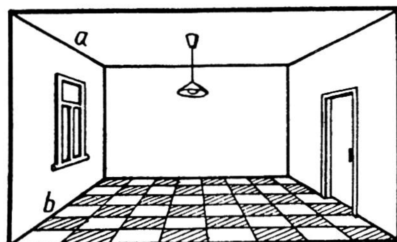
a) tiesė yra plokštumoje (žr. 5 pav., *a*);

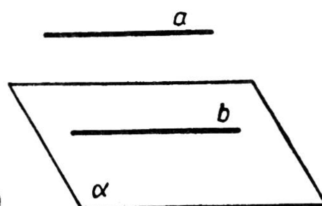
b) tiesė ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką, t. y. susikerta (žr. 5 pav., *b*);

c) tiesė ir plokštuma neturi nė vieno bendro taško.

A p i b r ė ž i m a s. *Tiesė ir plokštuma, kurios neturi bendrų taškų, vadinamos lygiagrečiosiomis.*

Tiesės a ir plokštumos α lygiagretumas užrašomas šitaip: $a \parallel \alpha$. Su plokštuma lygiagrečią tiesę vaizdžiai parodo ištempti troleibuso arba tramvajaus linijos laidai — jie lygiagretūs su žemės paviršiumi. Kitas pavyzdys — sienos ir lubų susikirtimo linija; ta linija lygiagreti su grindų plokštuma (15 pav., *a*). Atkreipiame dėmesį, kad grindų plokštumoje yra

a)


b)


15 pav.

su ta linija lygiagreti tiesė. Tai, pavyzdžiui, grindų ir tos pačios sienos susikirtimo linija. 15 paveiksle, *a*, tos tiesės pažymėtos raidėmis *a* ir *b*. Paaiškėja: jei plokštumoje α yra tiesė *b*, lygiagreti su tiese *a*, nesančia plokštumoje α, tai tiesė *a* ir plokštuma α lygiagrečios (15 pav., *b*). Kad plokštumoje α yra tiesė *b*, lygiagreti su tiese *a*, yra *požymis*, iš kurio galima padaryti išvadą apie tiesės *a* ir plokštumos α lygiagretumą. Šį teiginį suformuluosime kaip teoremą.

T e o r e m a. ***Jei plokštumoje nesanti tiesė lygiagreti su kuria nors toje plokštumoje esančia tiese, tai ta tiesė lygiagreti su plokštuma.***

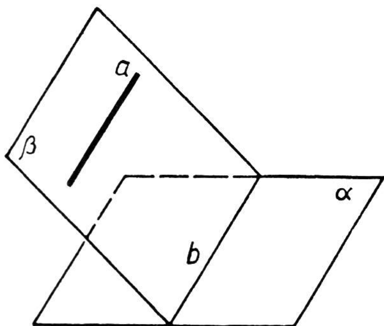
Į r o d y m a s. Nagrinėkime plokštumą α bei dvi lygiagrečias tieses *a* ir *b*. Sakykime, tiesė *b* yra plokštumoje α, o tiesė *a* nėra toje plokštumoje (15 pav., *b*). Įrodysime, kad $a \parallel \alpha$.

Tarkime, kad taip nėra. Tada tiesė *a* kerta plokštumą α. Remdamiesi plokštumos ir lygiagrečiųjų tiesių kirtimosi lema, teigiame, kad tiesė *b* irgi kerta plokštumą α. Tačiau taip negali būti, nes tiesė *b* yra plokštumoje α. Taigi tiesė *a* nekerta plokštumos α, todėl ji lygiagreti su ta plokštuma. Teorema įrodyta.

Įrodysime dar du teiginius, kuriais dažnai remiamasi sprendžiant uždavinius.

1°. *Jei plokštuma eina per tiesę, lygiagrečią su kita plokštuma, ir kerta tą plokštumą, tai plokštumų susikirtimo tiesė lygiagreti su ta tiese.*

Sakykime, per tiesę *a*, lygiagrečią su plokštuma α, eina plokštuma β, kuri plokštumą α kerta tiese *b* (16 pav.). Įrodysime, kad $b \parallel a$. Tiesės *a* ir *b* yra vienoje plokštumoje (plokštumoje β) ir nesusikerta, nes priešingu atveju tiesė *a* kirstų plokštumą α, o taip negali būti, nes $a \parallel \alpha$ (žinome iš sąlygos).

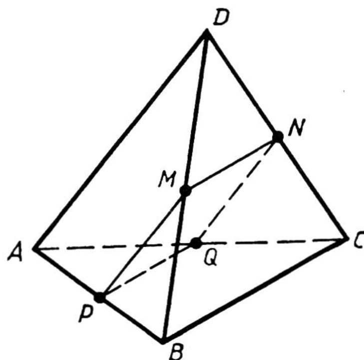


16 pav.

2°. *Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių lygiagreti su plokštuma, tai kita tiesė arba lygiagreti su ta plokštuma, arba yra toje plokštumoje.*

Sakykime, *a* ir *b* — lygiagrečios tiesės, be to, tiesė *a* lygiagreti su plokštuma α. Tada tiesė *a* nekerta plokštumos α. Remiantis plokštumos ir lygiagrečiųjų tiesių kirtimosi lema, tiesė *b* irgi nekerta plokštumos α. Taigi tiesė *b* arba lygiagreti su plokštuma α, arba yra toje plokštumoje.

Klausimai ir uždaviniai



17 pav.

16. Lygiagrečios tiesės a ir b yra plokštumoje α. Įrodykite, kad tiesė c, kertanti tieses a ir b, irgi yra plokštumoje α.

17. 17 paveiksle M, N, Q ir P — atkarpų DB, DC, AC ir AB vidurio taškai. Raskite keturkampio $MNQP$ perimetrą, kai $AD = 12$ cm, $BC = 14$ cm.

18. Taškas C yra atkarpoje AB. Per tašką A išvesta plokštuma, o per taškus B ir C — lygiagrečios tiesės, kurios tą plokštumą kerta taškuose B_1 ir C_1. Raskite atkarpos CC_1 ilgį, kai: a) C — atkarpos AB vidurio taškas ir $BB_1 = 7$ cm; b) $AC : CB = 3 : 2$ ir $BB_1 = 20$ cm.

19. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB ir BC kerta plokštumą α. Įrodykite, kad tiesės AD ir DC irgi kerta plokštumą α.

20. Trapecijos vidurinė linija yra plokštumoje α. Ar tiesės, kuriose yra trapecijos pagrindai, kerta plokštumą α? Atsakymą pagrįskite.

21. Trikampiai ABC ir ABD yra ne vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad kiekviena tiesė, lygiagreti su atkarpa CD, kerta tų trikampių plokštumas.

22. Taškai A ir B yra plokštumoje α, o taškas C nėra toje plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė, einanti per atkarpų AC ir BC vidurio taškus, lygiagreti su plokštuma α.

23. Taškas M nėra stačiakampio $ABCD$ plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė CD lygiagreti su plokštuma ABM.

24. Taškas M nėra trapecijos $ABCD$, kurios pagrindas AD, plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė AD lygiagreti su plokštuma BMC.

25. Įrodykite, kad jei tiesė lygiagreti su dviejų plokštumų susikirtimo tiese ir nėra tose plokštumose, tai ji lygiagreti su tomis plokštumomis.

26. Trikampio ABC kraštinė AC lygiagreti su plokštuma* α, o kraštinės AB ir BC tą plokštumą kerta taškuose M ir N. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir MBN panašūs.

27. Taškas C yra atkarpos AB taškas, be to, $AB : BC = 4 : 3$. Atkarpa CD, lygi 12 cm, lygiagreti su plokštuma α, einančia per tašką B. Įrodykite, kad tiesė AD kerta plokštumą α tam tikrame taške E, ir raskite atkarpą BE.

---

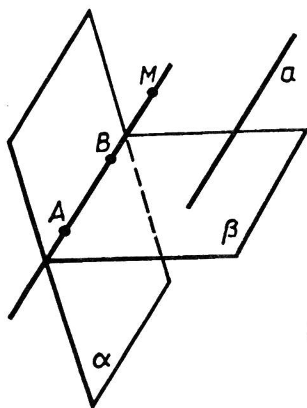
* Sakoma, kad atkarpa lygiagreti su plokštuma, kai tiesė, kurioje yra atkarpa, lygiagreti su ta plokštuma.

28. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC parinkti taškai D ir E; $DE = 5$ cm, $\frac{BD}{DA} = \frac{2}{3}$. Plokštuma α eina per taškus B ir C ir lygiagreti su atkarpa DE. Raskite atkarpos BC ilgį.

29. Trapecijos $ABCD$ pagrindas BC lygus 12 cm. Taškas M nėra trapecijos plokštumoje, o K yra atkarpos BM vidurio taškas. Įrodykite, kad plokštuma ADK kerta atkarpą MC tam tikrame taške H. Raskite atkarpą KH.

30. Trapecijos $ABCD$ pagrindas AB lygiagretus su plokštuma α, o viršūnė C yra toje plokštumoje. Įrodykite, kad: a) trapecijos pagrindas CD yra plokštumoje α; b) trapecijos vidurinė linija lygiagreti su plokštuma α.

31. Plokštuma α lygiagreti su trikampio ABC kraštine BC ir eina per kraštinės AB vidurio tašką. Įrodykite, kad plokštuma α eina ir per kraštinės AC vidurio tašką.



18 pav.

32. Plokštumos α ir β susikerta tiese AB. Tiesė a lygiagreti ir su plokštuma α, ir su plokštuma β. Įrodykite, kad tiesės a ir AB lygiagrečios.

S p r e n d i m a s. Per tašką A išveskime* tiesę AM, lygiagrečią su tiese a (18 pav.). Kadangi tiesė a lygiagreti su plokštumomis α ir β, tai tiesė AM yra ir plokštumoje α, ir plokštumoje β (6 skyrelio 2° teiginys). Taigi AM — tiesė, kuria susikerta plokštumos α ir β, t. y. ji sutampa su tiese AB. Vadinasi, $AB \parallel a$.

33. Įrodykite, kad jei trys plokštumos, neinančios per vieną tiesę, paporiui susikerta, tai tos susikirtimo tiesės arba lygiagrečios, arba turi bendrą tašką.

§ 2. TIESIŲ TARPUSAVIO PADĖTIS ERDVĖJE. KAMPAS TARP DVIEJŲ TIESIŲ

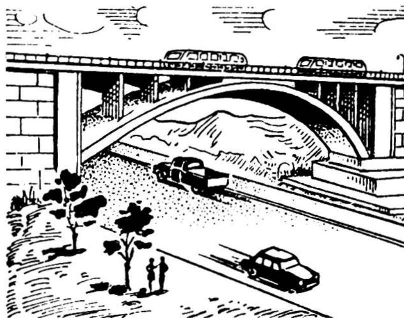
7. Prasilenkiančiosios tiesės. Jei dvi tiesės susikerta arba yra lygiagrečios, tai jos yra vienoje plokštumoje. Tačiau erdvėje gali būti dvi tiesės, nesančios vienoje plokštumoje, kitaip sakant, gali nebūti plokštumos, kuri eitų per tas abi tieses. Aišku, tokios tiesės nesusikerta ir nelygiagrečios.

* Pasakymus „išvesime tiesę“, „išvesime plokštumą“, aišku, reikia suprasti netiesiogine prasme (nei tiesės, nei plokštumos erdvėje nebrėžiame). Šie žodžiai reiškia, kad nurodytą tiesę ar plokštumą nagrinėsime.

A p i b r ė ž i m a s. *Dvi tiesės, kurios nėra vienoje plokštumoje, vadinamos prasileñkiančiosiomis tiesėmis.*

Pavyzdžiui, prasilenkiančiosios tiesės yra du keliai, kurių vienas eina viaduku, o kitas — po viaduku (19 pav.).

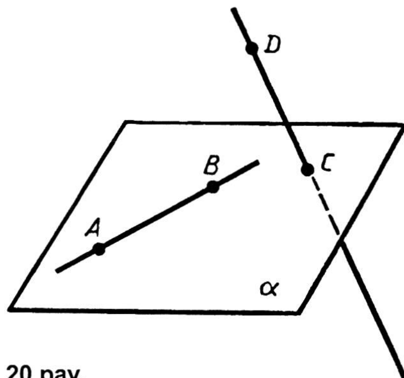
Įrodysime teoremą, kuri išreiškia p r a s i l e n k i a n č i ų j ų t i e s i ų p o ž y m į.



19 pav.

T e o r e m a. ***Jei viena tiesė yra plokštumoje, o kita tiesė tą plokštumą kerta taške, nesančiame pirmoje tiesėje, tai tos tiesės yra prasilenkiančiosios.***

Į r o d y m a s. Sakykime, tiesė AB yra plokštumoje α, o tiesė CD kerta tą plokštumą taške C, kuris nėra tiesėje AB (20 pav.). Įrodysime, kad AB ir CD — prasilenkiančiosios tiesės, kitaip sakant, jos nėra vienoje plokštumoje. Tarę, kad tiesės AB ir CD yra tam tikroje plokštumoje β, nustatome, jog plokštuma β eina per tiesę AB ir tašką C, taigi sutampa su plokštuma α. Tačiau taip negali būti, nes tiesė CD nėra plokštumoje α. Teorema įrodyta.



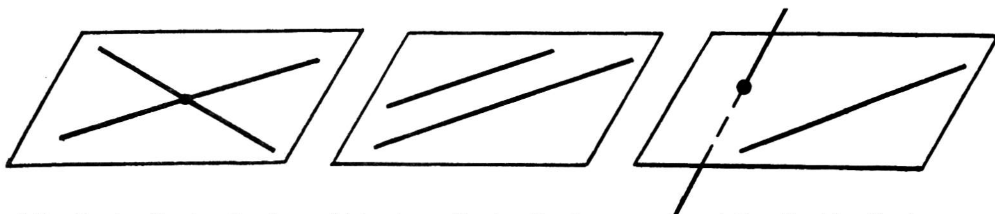
20 pav.

Taigi galimi trys dviejų tiesių tarpusavio padėties erdvėje atvejai:

a) *tiesės susikerta;* jos turi tik vieną bendrą tašką (21 pav., *a*);

b) *tiesės lygiagrečiosios;* jos yra vienoje plokštumoje ir nesusikerta (21 pav., *b*);

c) *tiesės prasilenkiančiosios;* jos nėra vienoje plokštumoje (21 pav., *c*).



a) Susikertančiosios tiesės. *b)* Lygiagrečiosios tiesės. *c)* Prasilenkiančiosios tiesės.

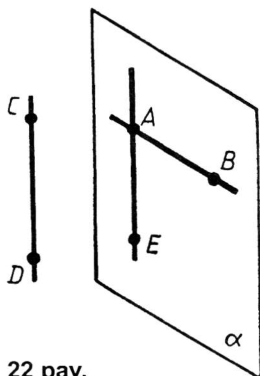
21 pav.

Įrodysime dar vieną prasilenkiančiųjų tiesių teoremą.

Teorema. ***Per kiekvieną iš dviejų prasilenkiančiųjų tiesių eina su kita tiese lygiagreti plokštuma, tačiau tik viena.***

Įrodymas. Sakykime, AB ir CD — prasilenkiančiosios tiesės (22 pav.). Įrodysime, kad per tiesę AB eina plokštuma, lygiagreti su tiese CD, tačiau tik viena.

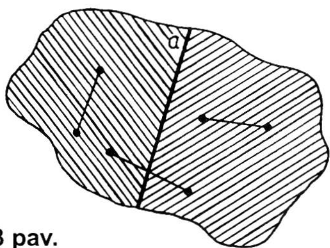
Per tašką A išveskime tiesę AE, lygiagrečią su tiese CD. Raide α pažymėkime plokštumą, einančią per tieses AB ir AE. Kadangi tiesė CD nėra plokštumoje α ir lygiagreti su tiese AE, esančia toje plokštumoje, tai tiesė CD lygiagreti su plokštuma α.



22 pav.

Įrodysime, kad α — vienintelė plokštuma, einanti per tiesę AB ir lygiagreti su tiese CD. Kiekviena kita plokštuma, einanti per tiesę AB, kerta tiesę AE, vadinasi, kerta ir su ja lygiagrečią tiesę CD. Teorema įrodyta.

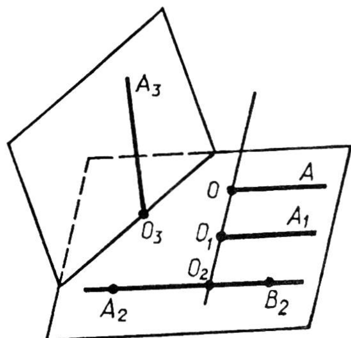
Šią teoremą vaizdžiai iliustruoja du keliai, kurių vienas eina viaduku, o kitas — po juo (žr. 19 pav.). Apatinis kelias yra žemės plokštumoje, kuri lygiagreti su keliu, einančiu viaduku. Aišku, ir per viaduko kelią eina su žemės plokštuma lygiagreti plokštuma, kuri lygiagreti su apatiniu keliu.



23 pav.

8. Kampai, kurių kraštinės vienakryptės. Remiantis viena aksioma (žr. 2 priedą), kiekviena tiesė a, esanti plokštumoje, dalija tą plokštumą į dvi dalis, kurios vadinamos *pùsplokštumėmis* (23 pav.). Tiesė a vadinama kiekvienos tų pusplokštumių *kraštù*. Vienos pusplokštumės bet kurie du taškai yra tiesės a vienoje pusėje, o bet kurie du skirtingų pusplokštumių taškai — skirtingose tos tiesės pusėse (žr. 23 pav.).

Vienakrỹpčiais spinduliaĩs vadinami tos pačios pusplokštumės ne vienoje tiesėje esantys lygiagretūs spinduliai. Vienoje tiesėje esantys spinduliai, kurie sutampa arba vienas jų yra kitame, irgi vadinami *vienakrypčiais*. 24 paveiksle spinduliai OA ir O_1A_1 bei spinduliai A_2B_2 ir O_2B_2 vienakrypčiai, o spinduliai OA ir O_2A_2, OA ir O_3A_3, O_2A_2 ir O_2B_2 nevienakrypčiai (paaiškinkite kodėl).



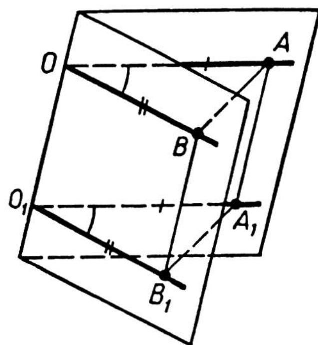
24 pav.

Įrodysime kampų, kurių kraštinės vienakryptės, teoremą.

T e o r e m a. ***Jei dviejų kampų atitinkamos kraštinės vienakryptės, tai tie kampai lygūs.***

Į r o d y m a s. Sakykime, kampų O ir O_1 atitinkamos kraštinės vienakryptės. Įrodysime, kad $\angle O = \angle O_1$.

Kampo O kraštinėse pažymėkime kuriuos nors taškus A ir B. Atitinkamose kampo O_1 kraštinėse atidėkime atkarpas $O_1A_1 = OA$ ir $O_1B_1 = OB$ (25 pav.).



25 pav.

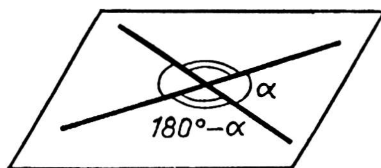
Keturkampis OO_1A_1A yra lygiagretainis, nes jo priešingosios kraštinės OA ir O_1A_1 yra lygiagrečios ir lygios. Iš to išplaukia, kad $AA_1 \parallel OO_1$ ir $AA_1 = OO_1$. Taip pat gautume, kad keturkampis OO_1B_1B yra lygiagretainis, todėl $BB_1 \parallel OO_1$ ir $BB_1 = OO_1$. Kadangi $AA_1 \parallel OO_1$ ir $BB_1 \parallel OO_1$, tai $AA_1 \parallel BB_1$ (remiantis trijų lygiagrečių tiesių teorema). Be to, $AA_1 = BB_1$, nes kiekviena jų lygi atkarpai OO_1. Taigi keturkampio ABB_1A_1 priešingosios kraštinės AA_1 ir BB_1 lygiagrečios ir lygios. Vadinasi, tas keturkampis — lygiagretainis, todėl $AB = A_1B_1$.

Palyginkime trikampius AOB ir $A_1O_1B_1$. Jie lygūs pagal tris kraštines, todėl $\angle O =$ $= \angle O_1$. Teorema įrodyta.

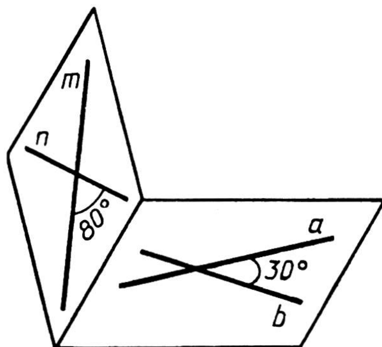
9. Kampas tarp tiesių. Bet kurios dvi susikertančios tiesės yra vienoje plokštumoje ir sudaro keturis neištiestinius kampus. Jei žinomas vienas tų kampų, tai galima rasti ir kitus tris kampus (26 pav., *a*). Sakykime, α — tas kampas, kuris ne didesnis už kiekvieną iš kitų trijų kampų. Tada sakoma, kad *kampas tarp susikertančiųjų tiesių lygus* α.

Akivaizdu, $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$. 26 paveiksle, *b*, kampas tarp tiesių *a* ir *b* lygus 30°, o kampas tarp tiesių *m* ir *n* lygus 80°.

Dabar apibrėšime kampą tarp prasilenkiančiųjų tiesių. Sakykime, AB ir CD — dvi prasilenkiančiosios tiesės (27 pav., *a*). Pasirinkime bet kurį erdvės tašką M_1, per jį išveskime tieses A_1B_1 ir C_1D_1, lygiagrečias su tiesėmis AB ir CD.

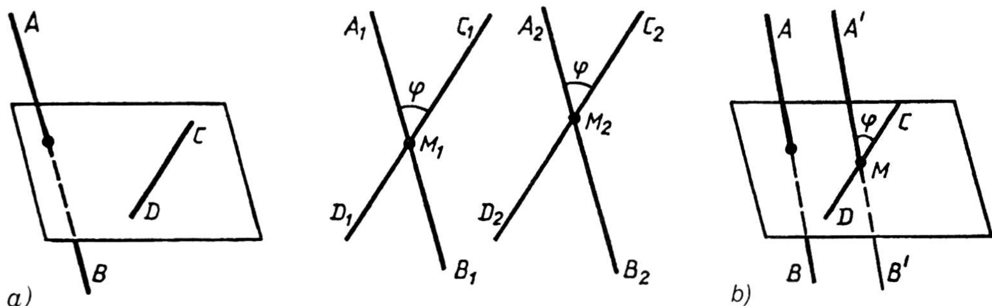


a)



b)

26 pav.



27 pav.

Jei kampas tarp tiesių A_1B_1 ir C_1D_1 lygus φ, tai sakysime, kad *kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių AB ir CD lygus* φ.

Įrodysime, kad kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių nepriklauso nuo taško M_1. Pasirinkime bet kurį kitą tašką M_2 ir per jį išveskime tieses A_2B_2 ir C_2D_2, lygiagrečias su tiesėmis AB ir CD (27 pav., *a*). Kadangi $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ ir $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (paaiškinkite kodėl), tai kampų, kurių viršūnės M_1 ir M_2, kraštinės paporiui vienakryptės (27 pav., *a*), $\angle A_1M_1C_1$ ir $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ ir $\angle A_2M_2D_2$ ir t. t. kraštinės paporiui vienakryptės. Vadinasi, tie kampai lygūs. Iš čia išplaukia, kad kampas tarp tiesių A_2B_2 ir C_2D_2 irgi lygus φ.

Tašku M_1 galima pasirinkti bet kurį vienos iš prasilenkiančiųjų tiesių tašką. 27 paveiksle, *b*, pažymėtas tiesės CD taškas M ir per jį išvesta tiesė $A'B'$, lygiagreti su tiese AB. Kampas tarp tiesių $A'B'$ ir CD irgi lygus φ.

Klausimai ir uždaviniai

34. Taškas D nėra trikampio ABC plokštumoje, M, N ir P — atkarpų DA, DB ir DC vidurio taškai, taškas K yra atkarpoje BN. Kokia šių tiesių tarpusavio padėtis: a) ND ir AB; b) PK ir BC; c) MN ir AB; d) MP ir AC; e) KN ir AC; f) MD ir BC?

35. Per tašką M, nesantį tiesėje a, išvestos dvi tiesės, kurios su tiese a neturi bendrų taškų. Įrodykite, kad bent viena tų tiesių ir tiesė a yra prasilenkiančiosios tiesės.

36. Tiesė c kerta tiesę a ir nekerta su tiese a lygiagrečios tiesės b. Įrodykite, kad b ir c — prasilenkiančiosios tiesės.

37. Tiesė m kerta trikampio ABC kraštinę AB. Kokia tiesių m ir BC tarpusavio padėtis, kai: a) tiesė m yra trikampio ABC plokštumoje ir su atkarpa AC neturi bendrų taškų; b) tiesė m nėra trikampio ABC plokštumoje?

38. Per rombo $ABCD$ viršūnę A išvesta tiesė a, lygiagreti su įstrižaine BD, o per viršūnę C — tiesė b, nesanti rombo plokštumoje. Įrodykite, kad: a) tiesės a ir CD susikerta; b) a ir b — prasilenkiančiosios tiesės.

39. Įrodykite, kad jei AB ir CD — prasilenkiančiosios tiesės, tai AD ir BC irgi prasilenkiančiosios tiesės.

40. Prasilenkiančiosiose tiesėse a ir b pažymėti taškai M ir N. Per tiesę a ir tašką N išvesta plokštuma α, o per tiesę b ir tašką M — plokštuma β. a) Ar tiesė b yra plokštumoje α? b) Ar susikerta plokštumos α ir β? Jei atsakote teigiamai, nurodykite tų plokštumų susikirtimo tiesę.

41. Ar kiekviena iš dviejų prasilenkiančiųjų tiesių gali būti lygiagreti su trečia tiese? Atsakymą pagrįskite.

42. Lygiagretainis $ABCD$ ir trapecija $ABEK$, kurios pagrindas EK, nėra vienoje plokštumoje. a) Kokia tiesių CD ir EK tarpusavio padėtis? b) Apskaičiuokite trapecijos perimetrą, žinodami, kad į ją galima įbrėžti apskritimą ir AB = 22,5 cm, EK = 27,5 cm.

43. Įrodykite, kad erdvinio keturkampio* kraštinių vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

44. OB ir CD — lygiagrečiosios tiesės, o OA ir CD — prasilenkiančiosios tiesės. Raskite kampą tarp tiesių OA ir CD, kai: a) $\angle AOB = 40^\circ$; b) $\angle AOB = 135^\circ$; c) $\angle AOB = 90^\circ$.

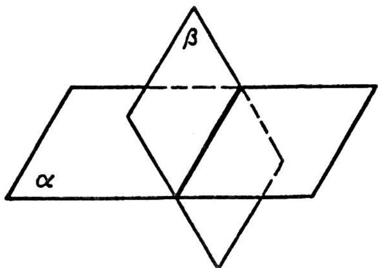
45. Tiesė a lygiagreti su lygiagretainio $ABCD$ kraštine BC ir nėra plokštumoje. Įrodykite, kad a ir CD — prasilenkiančiosios tiesės, ir raskite kampą tarp jų, kai vienas lygiagretainio kampas lygus: a) 50°; b) 121°.

46. Tiesė m lygiagreti su rombo $ABCD$ įstrižaine BD ir nėra rombo plokštumoje. Įrodykite, kad: a) m ir AC — prasilenkiančiosios tiesės, ir raskite kampą tarp jų; b) m ir AD — prasilenkiančiosios tiesės, ir raskite kampą tarp jų, kai $\angle ABC = 128^\circ$.

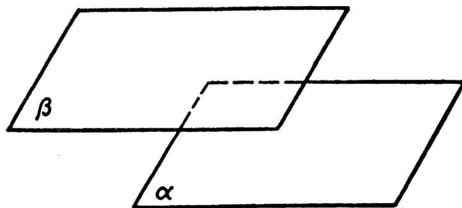
47. Erdvinio keturkampio $ABCD$ kraštinės AB ir CD lygios. Įrodykite, kad ir tiesė AB, ir tiesė CD su tiese, einančia per atkarpų BC ir AD vidurio taškus, sudaro lygius kampus.

§ 3. PLOKŠTUMŲ LYGIAGRETUMAS

10. Lygiagrečiosios plokštumos. Žinome, kad jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos kertasi tiese (aksioma A_3). Iš čia išplaukia, kad dvi plokštumos arba susikerta tiese (28 pav., a), arba nesusikerta, t. y. neturi nė vieno bendro taško (28 pav., b).



a) Plokštumos α ir β susikerta.



b) Plokštumos α ir β lygiagrečios.

28 pav.

* Keturkampis, kurio viršūnės nėra vienoje plokštumoje, vadinamas *erdviniù ketùrkampiu*.

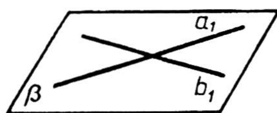
Apibrėžimas. *Dvi plokštumos, kurios nesusikerta, vadinamos lygiagrečiõsiomis plokštumomìs.*

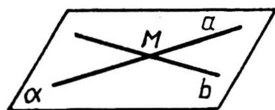
Lygiagrečiųjų plokštumų pavyzdys yra kambario grindys ir lubos, dvi priešingos sienos, stalo paviršius ir grindų plokštuma.

Plokštumų α ir β lygiagretumas žymimas šitaip $\alpha \parallel \beta$.

Išnagrinėsime dviejų plokštumų lygiagretumo požymį.

Teorema. ***Jei vienos plokštumos dvi susikertančiosios tiesės lygiagrečios su kitos plokštumos dviem tiesėmis, tai tos plokštumos lygiagrečios.***





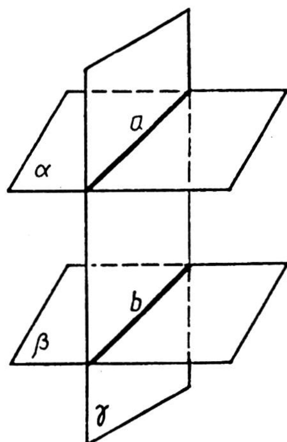
29 pav.

Įrodymas. Nagrinėkime dvi plokštumas α ir β (29 pav.). Plokštumoje α yra tiesės a ir b, kurios susikerta taške M, o plokštumoje β — tiesės a_1 ir b_1, be to, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Įrodysime, kad $\alpha \parallel \beta$. Pirmiausia pabrėžiame, kad $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ (remiantis tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiu).

Tarkime, kad plokštumos α ir β nelygiagrečios. Tada jos susikerta tam tikra tiese c. Taigi plokštuma α eina per tiesę a, lygiagrečią su plokštuma β, ir kerta plokštumą β tiese c. Iš čia išplaukia (remiantis 6 skyrelio 1° savybe), kad $a \parallel c$. Tačiau plokštuma α eina ir per tiesę b, lygiagrečią su plokštuma β, todėl $b \parallel c$. Taigi per tašką M eina dvi tiesės a ir b, lygiagrečios su tiese c. Tačiau taip negali būti, nes pagal lygiagrečiųjų tiesių teoremą per tašką M eina tik viena tiesė, lygiagreti su tiese c. Teorema įrodyta.

11. Lygiagrečiųjų plokštumų savybės. Išnagrinėsime dvi lygiagrečiųjų plokštumų savybes.

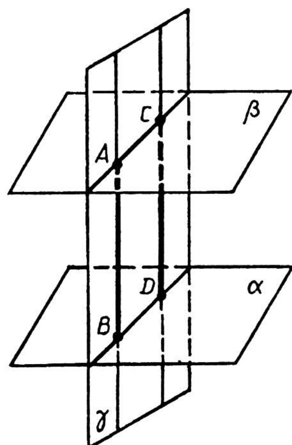
1°. *Jei dvi lygiagrečias plokštumas kerta trečia plokštuma, tai jų susikirtimo tiesės lygiagrečios.*



30 pav.

Šį teiginį patvirtina kambario grindų ir lubų bei sienos susikirtimo linijos — jos yra lygiagrečios. Įrodydami suformuluotą savybę, išnagrinėkime tieses a ir b, kuriomis lygiagrečios plokštumos α ir β kerta plokštumą γ (30 pav.). Įrodysime, kad $a \parallel b$. Tos tiesės yra vienoje plokštumoje (plokštumoje γ) ir nesusikerta. Jei tiesės a ir b susikirstų, tai plokštumos α ir β turėtų bendrą tašką. Taip negali būti, nes $\alpha \parallel \beta$. Taigi tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje ir nesusikerta, t. y. $a \parallel b$.

2°. *Lygiagrečiųjų tiesių atkarpos, esančios tarp lygiagrečių plokštumų, lygios.*



31 pav.

Nagrinėkime dviejų lygiagrečiųjų tiesių atkarpas AB ir CD, esančias tarp lygiagrečių plokštumų α ir β (31 pav.). Įrodysime, kad $AB = CD$. Plokštuma γ, einanti per lygiagrečias tieses AB ir CD, plokštumas α ir β kerta lygiagrečiomis tiesėmis AC ir BD (1° savybė). Taigi keturkampio $ABDC$ priešingosios kraštinės paporiui lygiagrečios, t. y. $ABDC$ — lygiagretainis. Tačiau lygiagretainio priešingosios kraštinės lygios, todėl $AB = CD$.

Klausimai ir uždaviniai

48. Apžiūrėję klasėje esančius daiktus, pateikite lygiagrečių plokštumų pavyzdžių.

49. Tiesė m plokštumą α kerta taške B. Ar yra plokštuma, einanti per tiesę m ir lygiagreti su plokštuma α?

50. Plokštumos α ir β lygiagrečios, tiesė m yra plokštumoje α. Įrodykite, kad tiesė m lygiagreti su plokštuma β.

51. Įrodykite, kad plokštumos α ir β lygiagrečios, kai plokštumos α dvi susikertančios tiesės m ir n lygiagrečios su plokštuma β.

52. Dvi trikampio kraštinės lygiagrečios su plokštuma α. Įrodykite, kad ir trečioji trikampio kraštinė lygiagreti su plokštuma α.

53. Trys atkarpos A_1A_2, B_1B_2 ir C_1C_2, nesančios vienoje plokštumoje, turi bendrą vidurio tašką. Įrodykite, kad plokštumos $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ lygiagrečios.

54. Taškas B nėra trikampio ADC plokštumoje, M, N ir P — atkarpų BA, BC ir BD vidurio taškai. a) Įrodykite, kad plokštumos MNP ir ADC lygiagrečios. b) Raskite trikampio MNP plotą, kai trikampio ADC plotas lygus 48 cm^2.

55. Įrodykite, kad jei tiesė a kerta plokštumą α, tai ji kerta kiekvieną plokštumą, lygiagrečią su plokštuma α.

S p r e n d i m a s. Nagrinėkime bet kurią plokštumą β, lygiagrečią su plokštuma α. Per kurį nors plokštumos β tašką B išveskime tiesę b, lygiagrečią su tiese a. Kadangi tiesė a kerta plokštumą α, tai tiesė b irgi kerta tą plokštumą. Vadinasi, tiesė b kerta plokštumą β (bet nėra joje). Todėl tiesė a irgi kerta plokštumą β.

56. Plokštumos α ir β lygiagrečios, A — plokštumos α taškas. Įrodykite, kad kiekviena tiesė, einanti per tašką A ir lygiagreti su plokštuma β, yra plokštumoje α.

57. Tiesė a lygiagreti su viena iš dviejų lygiagrečių plokštumų. Įrodykite, kad tiesė a arba lygiagreti su kita plokštuma, arba yra joje.

58. Įrodykite, kad jei plokštuma γ kerta vieną iš lygiagrečių plokštumų α ir β, tai ji kerta ir kitą plokštumą.

S p r e n d i m a s. Sakykime, plokštuma γ plokštumą α kerta tiese a. Įrodysime, kad plokštuma γ kerta ir plokštumą β. Plokštumoje γ išveskime tiesę b, kertančią tiesę a. Tiesė b kerta plokštumą α, todėl ji kerta ir su ta plokštuma lygiagrečią plokštumą β (55 uždavinys). Vadinasi, ir plokštuma γ, kurioje yra tiesė b, kerta plokštumą β.

59. Įrodykite, kad per tašką A, nesantį plokštumoje α, eina su plokštuma α lygiagreti plokštuma, tačiau tik viena.

S p r e n d i m a s. Plokštumoje α išveskime dvi susikertančias tieses a ir b, o per tašką A išveskime tieses a_1 ir b_1, lygiagrečias su tiesėmis a ir b. Nagrinėkime plokštumą β, einančią per tieses a_1 ir b_1. Plokštuma β — ieškomoji, nes eina per tašką A ir pagal dviejų plokštumų lygiagretumo požymį lygiagreti su plokštuma α.

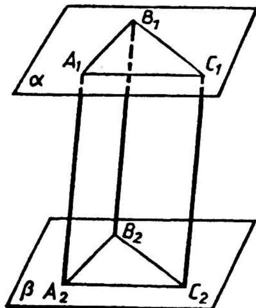
Dabar įrodysime, kad β — vienintelė plokštuma, einanti per tašką A ir lygiagreti su plokštuma α. Kiekviena kita plokštuma, einanti per tašką A, kerta plokštumą β, todėl kerta ir su ja lygiagrečią plokštumą α (58 uždavinys).

60. Dvi plokštumos α ir β lygiagrečios su plokštuma γ. Įrodykite, kad plokštumos α ir β lygiagrečios.

61. Duotos susikertančios tiesės a ir b bei taškas A, nesantis tų tiesių plokštumoje. Įrodykite, kad per tašką A eina plokštuma, lygiagreti su tiesėmis a ir b, tačiau tik viena.

62. Kampamačio skritulio horizontalumas tikrinamas dviem gulsčiukais, kurie įtaisyti skritulio plokštumos dviejose susikertančiose tiesėse. Kodėl tam netinka du vienas su kitu lygiagretūs gulsčiukai?

63. Lygiagrečios plokštumos α ir β kampo BAC kraštinę AB kerta taškuose A_1 ir A_2, o to kampo kraštinę AC — taškuose B_1 ir B_2. Raskite: a) AA_2 ir AB_2, kai $A_1A_2 = 2A_1A$, $A_1A_2 = 12$ cm, $AB_1 = 5$ cm; b) A_2B_2 ir AA_2, kai $A_1B_1 = 18$ cm, $AA_1 = 24$ cm, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.



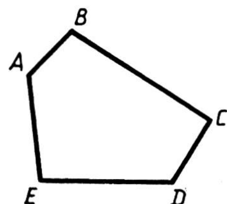
32 pav.

64. Trys tiesės, einančios per vieną tašką ir nesančios vienoje plokštumoje, vieną iš lygiagrečių plokštumų kerta taškuose A_1, B_1 ir C_1, o kitą — taškuose A_2, B_2 ir C_2. Įrodykite, kad trikampiai $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ panašūs.

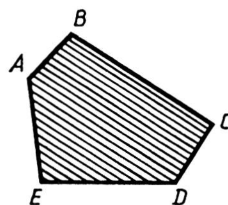
65. Lygiagrečios atkarpos A_1A_2, B_1B_2 ir C_1C_2 yra tarp lygiagrečių plokštumų α ir β (32 pav.). a) Nustatykite keturkampių $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ ir $A_1C_1C_2A_2$ rūšį. b) Įrodykite, kad $\Delta\ A_1B_1C_1 = \Delta\ A_2B_2C_2$.

12. Tetraedras. Viename šio kurso skyrių detaliai bus nagrinėjami briaunainiai — geometrinių kūnų paviršiai, sudaryti iš daugiakampių. Tačiau jau dabar susipažinsime su dviem briaunainiais — *tetraedrù* ir *gretasiẽniu*. Naudodamiesi jais, galėsime paaiškinti sąvokas, susijusias su tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtimi.

Pirmiausia prisiminsime, ką planimetrijoje laikėme daugiakampiu. Daugiakampį nagrinėjome arba kaip iš atkarpų sudarytą uždarąją liniją be savikirtos taškų (33 pav., *a*), arba kaip tos linijos apribotą plokštumos dalį įskaitant ir pačią liniją (33 pav., *b*). Nagrinėdami paviršius ir kūnus erdvėje, daugiakampį suprasime antrąja prasme. Kiekvienas daugiakampis erdvėje yra plokščiasis paviršius.



a) Daugiakampis *ABCDE* — iš atkarpų sudaryta figūra.

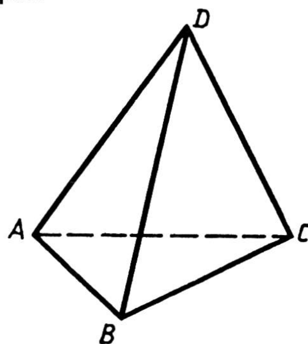


b) Daugiakampis *ABCDE* — plokštumos dalis, kurią riboja laužtė *ABCDE*.

33 pav.

Dabar apibrėšime tetraedrą.

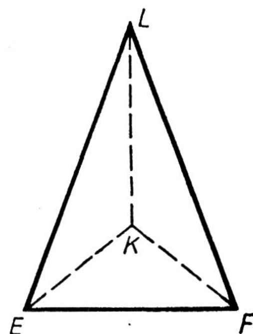
Nagrinėkime bet kurį trikampį *ABC* ir tašką *D*, nesantį to trikampio plokštumoje. Tašką *D* atkarpomis sujungę su trikampio *ABC* viršūnėmis, gausime trikampius *DAB, DBC* ir *DCA*. Paviršius, sudarytas iš keturių trikampių *ABC, DAB, DBC* ir *DCA*, vadinamas *tetraedru* ir žymimas šitaip: *DABC* (34 pav.).



34 pav.

Trikampiai, kurie sudaro tetraedrą, vadinami *tetraèdro síenomis*, jų kraštinės — *tetraèdro briaunomìs*, o viršūnės — *tetraèdro viršū́nėmis*. Tetraedras turi keturias sienas, šešias briaunas ir keturias viršūnes. Dvi tetraedro briaunos, neturinčios bendrų viršūnių, vadinamos *príešingomis briaunomìs*. 34 paveiksle priešingos briaunos yra *AD* ir *BC, BD* ir *AC, CD* ir *AB*. Kartais išskiriama viena tetraedro siena, kuri vadinama *tetraèdro pãgrindu*. Tada trys kitos sienos vadinamos tetraedro *šóninėmis síenomis*.

Tetraedras dažniausiai vaizduojamas taip, kaip parodyta 34 ir 35 paveiksluose, t. y. kaip iškilasis arba neiškilasis keturkam-



35 pav.

pis kartu su įstrižainėmis. Nematomos briaunos vaizduojamos brūkšninėmis linijomis. 34 paveiksle nematoma tik briauna AC, o 35 paveiksle — briaunos EK, KF ir KL.

13. Gretasienis. Nagrinėkime du lygius lygiagretainius $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, esančius lygiagrečiose plokštumose, kai atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1 lygiagrečios (36 pav., *a*).

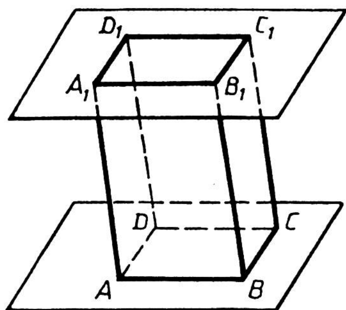
Keturkampiai

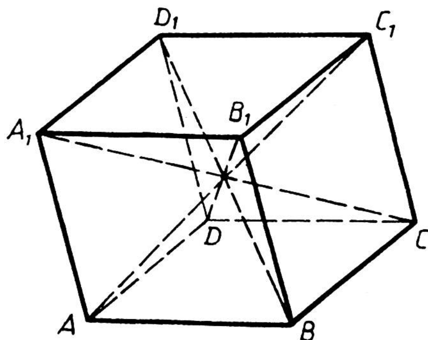
$$ABB_1A_1,\ BCC_1B_1,\ CDD_1C_1,\ DAA_1D_1 \qquad (1)$$

irgi yra lygiagretainiai, nes kiekvieno jų priešingosios kraštinės paporiui lygiagrečios (pavyzdžiui, keturkampio ABB_1A_1 kraštinės AA_1 ir BB_1 lygiagrečios, nes taip duota sąlygoje, o kraštinių AB ir A_1B_1 lygiagretumą nustatome remdamiesi dviejų lygiagrečių plokštumų kirtimo trečia plokštuma savybe (11 skyrelio 1° savybė). Paviršius, kurį sudaro du lygūs lygiagretainiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$ bei keturi (1) lygiagretainiai, vadinamas *gretasieniù* ir žymimas šitaip: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Lygiagretainiai, iš kurių sudarytas gretasienis, vadinami *gretasiẽnio síenomis*, jų kraštinės — *gretasiẽnio briaunomìs*, o viršūnės — *gretasiẽnio viršū́nėmis*. Gretasienis turi šešias sienas, dvylika briaunų ir aštuonias viršūnes. Dvi gretasienio sienos, turinčios bendrą briauną, vadinamos *gretimomìs síenomis*, o neturinčios bendrų briaunų — *príešingomis síenomis*. 36 paveiksle, *b*, priešingos sienos yra $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 ir DCC_1D_1, ADD_1A_1 ir BCC_1B_1. Dvi viršūnės, nepriklausančios vienai sienai, vadinamos *príešingomis viršū́nėmis*. Atkarpa, jungianti priešingas viršūnes, vadinama *gretasiẽnio įstrižainė*. Kiekvienas gretasienis turi keturias įstrižaines. 36 paveiksle, *b*, gretasienio įstrižainės yra atkarpos AC_1, BD_1, CA_1 ir DB_1.

Kartais išskiriamos kurios nors dvi priešingos gretasienio sienos ir vadinamos *gretasiẽnio pagrindaĩs*. Tada kitos sienos vadinamos *gretasiẽnio šóninėmis síenomis*. Pagrindams nepriklausančios gretasienio briaunos





36 pav. Gretasienis.

vadinamos *šóninėmis briaunomìs*. Pavyzdžiui, jei pagrindais laikysime sienas $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, tai šoninės sienos bus (1) lygiagretainiai, o šoninės briaunos — atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1.

Gretasienis dažniausiai vaizduojamas taip, kaip parodyta 36 paveiksle, *b*. Gretasienio sienų atvaizdai yra lygiagretainiai. Nematomos briaunos ir kitos nematomos atkarpos, pavyzdžiui, įstrižainės, vaizduojamos brūkšninėmis linijomis.*

Išnagrinėsime dvi gretasienio savybes.

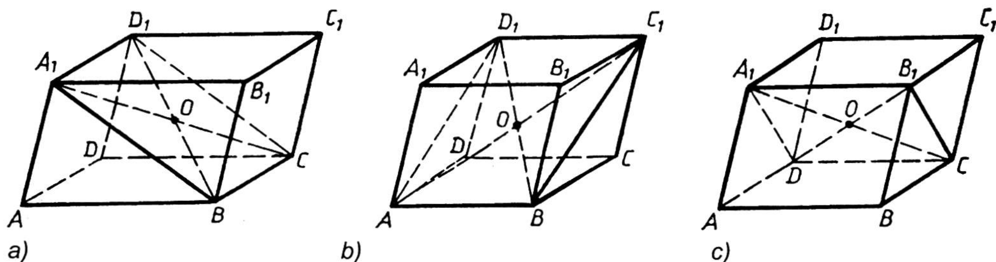
1°. *Gretasienio priešingosios sienos lygiagrečios*** *ir lygios.*

Įrodysime, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (36 pav., *b*) priešingosios sienos, pavyzdžiui, ABB_1A_1 ir DCC_1D_1, lygiagrečios ir lygios. Kadangi $ABCD$ ir ADD_1A_1 — lygiagretainiai, tai $AB \parallel DC$ ir $AA_1 \parallel DD_1$. Taigi vienos sienos dvi susikertančios tiesės AB ir AA_1 lygiagrečios su kitos sienos dviem tiesėmis CD ir DD_1. Iš čia, remiantis plokštumų lygiagretumo požymiu, išeina, kad sienos ABB_1A_1 ir DCC_1D_1 lygiagrečios.

Dabar įrodysime, kad tos sienos lygios. Kadangi visos gretasienio sienos yra lygiagretainiai, tai $AB = DC$ ir $AA_1 = DD_1$. Dėl tos pačios priežasties kampų A_1AB ir D_1DC atitinkamos kraštinės vienakryptės, todėl tie kampai lygūs. Taigi lygiagretainio ABB_1A_1 dvi gretimos kraštinės ir kampas tarp jų lygios lygiagretainio DCC_1D_1 dviem gretimoms kraštinėms ir kampui tarp jų. Tokie lygiagretainiai lygūs.

2°. *Gretasienio įstrižainės kertasi viename taške, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.*

Norėdami šią savybę įrodyti, išnagrinėkime keturkampį A_1D_1CB, kurio įstrižainės A_1C ir D_1B yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (37 pav., *a*) įstrižainės. Kadangi $A_1D_1 \parallel BC$ ir $A_1D_1 = BC$ (paaiškinkite kodėl), tai A_1D_1CB — lygiagretainis. Jo įstrižainės A_1C ir D_1B susikerta tam tikrame taške O, kuris kiekvieną įstrižainę dalija pusiau.



37 pav.

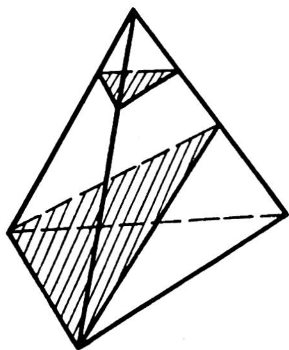
* Smulkiau apie erdvinių figūrų, skyrium imant, gretasienio, vaizdavimą plokštumoje aiškinama 1 priede.

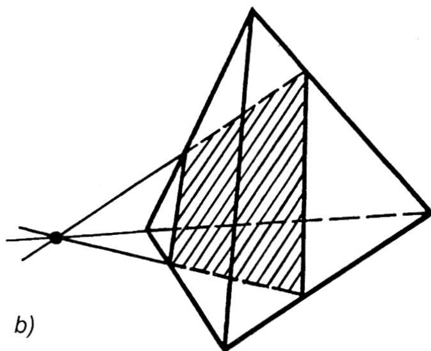
** *Lygiagrečiomis* gretasienio *sienomis* vadinamos dvi jo sienos, kurių plokštumos lygiagrečios.

Toliau išnagrinėkime keturkampį AD_1C_1B (37 pav., *b*). Jis irgi yra lygiagretainis (tai įrodykite), vadinasi, jo įstrižainės AC_1 ir D_1B susikerta ir susikirtimo taškas jas dalija pusiau. Tačiau įstrižainės D_1B vidurio taškas yra O. Vadinasi, įstrižainės A_1C, D_1B ir AC_1 susikerta taške O, kuris kiekvieną tų įstrižainių dalija pusiau.

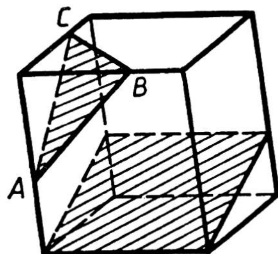
Išnagrinėję keturkampį A_1B_1CD (37 pav., *c*), taip pat įsitikintume, kad ir ketvirtoji gretasienio įstrižainė DB_1 eina per tašką O, kuris ją dalija pusiau.

14. Pjūvių braižymo uždaviniai. Sprendžiant daug su tetraedru ir gretasieniu susijusių uždavinių, naudinga mokėti paveiksle braižyti jų pjūvius, gautus perkirtus tuos briaunainius įvairiomis plokštumomis. Patikslinsime, ką vadiname tetraedro arba gretasienio pjūviu. Tetraedro (gretasienio) *kertamąja plókštuma* vadinama kiekviena plokštuma, kurios abiejose pusėse yra to tetraedro (gretasienio) taškų. Kertamoji plokštuma tetraedro (gretasienio) sienas kerta atkarpomis. Daugiakampis, kurio kraštinės yra tos atkarpos, vadinamos *tetraèdro (gretasienio) pjūviù*. Kadangi tetraedras turi keturias sienas, tai jo pjūviai gali būti tik trikampiai ir keturkampiai (38 pav.). Gretasienis turi šešias sienas. Jo pjūviai gali būti trikampiai, keturkampiai (39 pav., *a*), penkiakampiai (39 pav., *b*) ir šešiakampiai (39 pav., *c*).

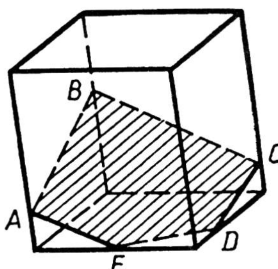

a)


b)

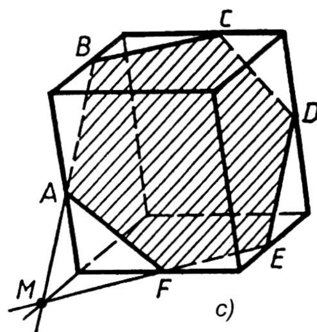
38 pav.



a)



b)



c)

39 pav.

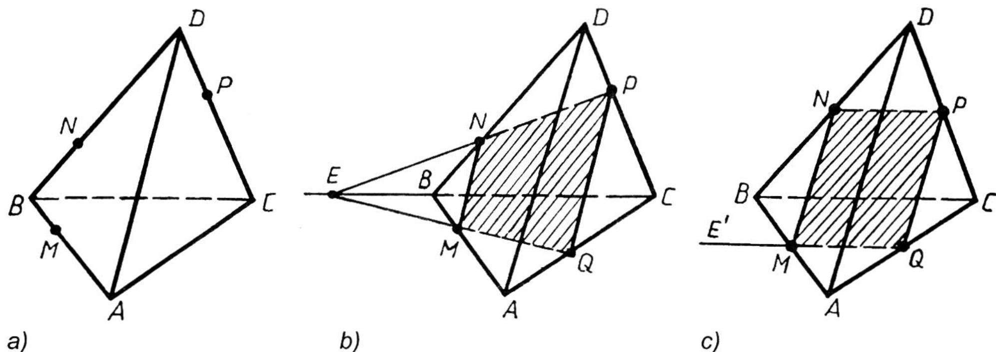
Braižant gretasienio pjūvius, paveiksle reikia atsižvelgti į tai, kad kertamoji plokštuma dvi priešingas sienas kerta lygiagrečiomis atkarpomis (11 skyrelio 1° savybė). Pavyzdžiui, 39 paveiksle, *b*, kertamoji plokštuma dvi priešingas sienas (kairiąją ir dešiniąją) kerta atkarpomis *AB* ir *CD*, o kitas dvi priešingas sienas (priekinę ir užpakalinę) — atkarpomis *AE* ir *BC*, todėl $AB \parallel CD$ ir $AE \parallel BC$. Dėl tos pačios priežasties 39 paveiksle, *c*, $AB \parallel ED$, $AF \parallel CD$, $BC \parallel EF$. Dar pabrėžiame, kad pjūviui nubraižyti pakanka rasti tetraedro (gretasienio) briaunų ir kertamosios plokštumos susikirtimo taškus. Po to reikia tik nubrėžti atkarpas, jungiančias kiekvienus du rastus tos pačios sienos taškus.

Išnagrinėsime pjūvių braižymo pavyzdžių.

1 uždavinys. *Taškai M, N ir P yra tetraedro ABCD briaunose AB, BD ir CD* (40 pav., *a*). *Reikia nubraižyti tetraedro pjūvį, gautą jį perkirtus plokštuma MNP.*

Sprendimas. Iš pradžių nubraižysime plokštumos *MNP* ir sienos *ABC* plokštumos susikirtimo tiesę. Taškas *M* yra bendras tų plokštumų taškas. Norėdami rasti dar vieną bendrą tašką, atkarpas *NP* ir *BC* pratęskime, kol jos susikirs taške *E* (40 pav., *b*). Taškas *E* yra plokštumų *MNP* ir *ABC* antras bendras taškas. Vadinasi, tos plokštumos kertasi tiese *ME*. Tiesė *ME* briauną *AC* kerta tam tikrame taške *Q*. Keturkampis *MNPQ* — ieškomasis pjūvis.

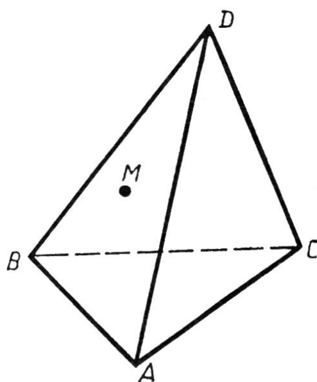
Jei tiesės *NP* ir *BC* lygiagrečios (40 pav., *c*), tai tiesė *NP* lygiagreti su siena *ABC*. Tada plokštuma *MNP* tą sieną kerta tiese *ME'*, lygiagrečia su tiese *NP*. Kaip ir pirmuoju atveju, taškas *Q* yra briaunos *AC* ir tiesės *ME'* susikirtimo taškas.

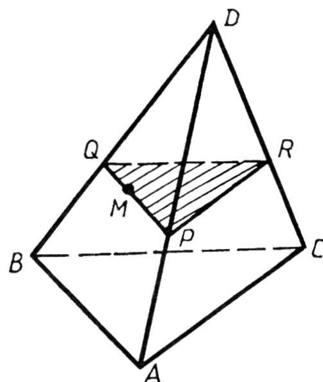


40 pav.

• 2 uždavinys. *Taškas M yra tetraedro DABC šoninės sienos ADB taškas* (41 pav., *a*). *Reikia nubraižyti tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su pagrindu ABC.*

Sprendimas. Kadangi kertamoji plokštuma lygiagreti su plokštuma *ABC*, tai ji lygiagreti su tiesėmis *AB, BC* ir *CA*. Vadinasi,





41 pav.

kertančios plokštumos ir tetraedro šoninių sienų plokštumų susikirtimo tiesės lygiagrečios su trikampio *ABC* kraštinėmis (6 skyrelio 1° teiginys). Taigi ieškomą pjūvį braižysime šitaip. Per tašką *M* brėžiame tiesę, lygiagrečią su atkarpa *AB*. Tos tiesės ir šoninių briaunų *DA* ir *DB* susikirtimo taškus pažymime raidėmis *P* ir *Q* (41 pav., *b*). Po to per tašką *P* brėžiame tiesę, lygiagrečią su atkarpa *AC*. Sakykime, *R* — tos tiesės ir briaunos *DC* susikirtimo taškas. Trikampis *PQR* yra ieškomasis pjūvis.

3 u ž d a v i n y s. *Taškai A, B ir C yra gretasienio briaunų taškai. Reikia nubraižyti gretasienio pjūvį, kuris gaunamas gretasienį perkirtus plokštuma ABC.*

S p r e n d i m a s. Ieškomojo pjūvio braižymas priklauso nuo to, kuriose gretasienio briaunose yra taškai *A, B* ir *C*. Kai tie taškai yra iš vienos viršūnės išeinančiose briaunose (žr. 39 pav., *a*), reikia nubrėžti atkarpas *AB, BC* ir *CA*. Gausime ieškomąjį pjūvį — trikampį *ABC*. Jei trys duotieji taškai *A, B* ir *C* išdėstyti taip, kaip parodyta 39 paveiksle, *b*, tai pirmiausia reikia nubrėžti atkarpas *AB* ir *BC*, po to per tašką *A* — tiesę, lygiagrečią su atkarpa *BC*, o per tašką *C* — tiesę, lygiagrečią su atkarpa *AB*. Tų tiesių ir apatinės sienos briaunų susikirtimo taškai yra *E* ir *D*. Tad nubrėžiama atkarpa *ED*. Ieškomasis pjūvis — penkiakampis *ABCDE* — nubraižytas.

Sudėtingesnis atvejis, kai duotieji taškai *A, B* ir *C* išdėstyti taip, kaip parodyta 39 paveiksle, *c*. Tuo atveju pirmiausia brėžiame tiesę, kuria kertamoji plokštuma kerta apatinio pagrindo plokštumą. Po to brėžiame tiesę *AB* ir tęsiame apatinę briauną, esančią toje pačioje sienoje, kaip ir tiesė *AB*, kol ji susikerta su ta tiese taške *M*. Po to per tašką *M* brėžiame tiesę, lygiagrečią su tiese *BC*. Tai tiesė, kuria kertamoji plokštuma kerta apatinio pagrindo plokštumą. Ji apatinio pagrindo briaunas kerta taškuose *E* ir *F*. Po to per tašką *E* brėžiame tiesę, lygiagrečią su tiese *AB*, ir gauname tašką *D*. Pagaliau nubrėžiame atkarpas *AF* ir *CD*, ir ieškomasis pjūvis — šešiakampis *ABCDEF* — nubraižytas.

Uždaviniai

66. Išvardykite tetraedro $ABCD$ visas prasilenkiančiųjų briaunų (t. y. briaunų, esančių prasilenkiančiosiose tiesėse) poras. Kiek tokių briaunų porų turi tetraedras?

67. Tetraedro $DABC$ $\angle ADB = 54^\circ$, $\angle BDC = 72^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$, $DA = 20$ cm, $BD = 18$ cm, $DC = 21$ cm. Raskite: a) tetraedro pagrindo ABC briaunas; b) visų šoninių sienų plotus.

68. M ir N — tetraedro $ABCD$ briaunų AB ir AC vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesė MN lygiagreti su plokštuma BCD.

69. Per tetraedro $SABC$ briaunų AB ir BC vidurio taškus išvesta su briauna SB lygiagreti plokštuma. Įrodykite, kad tos plokštumos bei sienų SAB ir SBC susikirtimo tiesės lygiagrečios.

70. Įrodykite, kad plokštuma, einanti per tetraedro $ABCD$ briaunų AB, AC ir AD vidurio taškus, lygiagreti su plokštuma BCD.

71. Tetraedro $DABC$ briaunose DB, DC ir BC pažymėkite taškus M, N ir K. Raskite: a) tiesės MN ir plokštumos ABC susikirtimo tašką; b) tiesės KN ir plokštumos ABD susikirtimo tašką.

72. Nubraižykite tetraedro $DABC$ pjūvį, gautą perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su sienos ABC plokštuma, kai: a) M yra briaunos AD vidurio taškas; b) taškas M yra sienos ABD viduje.

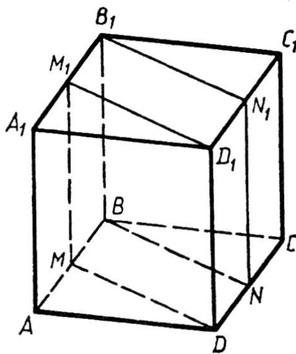
73. M, N ir P yra tetraedro $ABCD$ briaunų AB, BC ir CD vidurio taškai, $AC = 10$ cm, $BD = 12$ cm. Įrodykite, kad plokštuma MNP eina per briaunos AD vidurio tašką K. Apskaičiuokite keturkampio, gauto tetraedrą perkirtus plokštuma MNP, perimetrą.

74. Per tetraedro $ABCD$ sienos BCD pusiaukraštinių susikirtimo tašką išvesta plokštuma, lygiagreti su siena ABC. a) Įrodykite, kad tetraedro pjūvis, gautas tetraedrą perkirtus ta plokštuma, yra į trikampį ABC panašus trikampis. b) Raskite pjūvio trikampio ir trikampio ABC plotų santykį.

75. Pavaizduokite tetraedrą $KLMN$. a) Nubraižykite to tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma, einančia per briauną KL ir briaunos MN vidurio tašką A. b) Įrodykite, kad plokštuma, einanti per atkarpų LM, MA ir MK vidurio taškus E, O ir F, lygiagreti su plokštuma LKA. Apskaičiuokite trikampio EOF plotą, kai trikampio LKA plotas lygus 24 cm^2.

76. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad $AC \parallel A_1C_1$ ir $BD \parallel B_1D_1$.

77. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ visų briaunų suma lygi 120 cm. Raskite kiekvieną gretasienio briauną, kai $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.



42 pav.

78. 42 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, jo briaunose pažymėti taškai M, N, M_1 ir N_1; $AM = CN = A_1M_1 = C_1N_1$. Įrodykite, kad $MBNDM_1B_1N_1D_1$ yra gretasienis.

79. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma: a) ABC_1; b) ACC_1. Įrodykite, kad tie pjūviai yra lygiagretainiai.

80. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvius, gautus gretasienį perkirtus plokštumomis ABC_1 ir DCB_1, bei tų pjūvių susikirtimo atkarpą.

81. Pažymėkite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų BB_1 ir CC_1 taškus M ir N. Raskite: a) tiesės MN ir plokštumos ABC susikirtimo tašką; b) tiesės AM ir plokštumos $A_1B_1C_1$ susikirtimo tašką.

82. Pažymėkite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos AA_1B_1B vidaus tašką M. Nubraižykite gretasienio pjūvį, gautą jį perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su: a) pagrindo $ABCD$ plokštuma; b) siena BB_1C_1C; c) plokštuma BDD_1.

83. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma, einančia per: a) briauną CC_1 ir sienos AA_1D_1D įstrižainių susikirtimo tašką; b) sienos $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką ir lygiagrečią su plokštuma AB_1C_1.

84. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma, einančia per taškus B_1, D_1 ir briaunos CD vidurio tašką. Įrodykite, kad gautasis pjūvis yra trapecija.

85. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma BKL; čia K — briaunos AA_1 vidurio taškas, L — briaunos CC_1 vidurio taškas. Įrodykite, kad gautas pjūvis yra lygiagretainis.

86. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma, einančia per pagrindo įstrižainę AC ir lygiagrečia su įstrižaine BD_1. Įrodykite, kad jei gretasienio pagrindas yra rombas, o kampai ABB_1 ir CBB_1 statūs, tai gautas pjūvis yra lygiašonis trikampis.

87. Nubraižykite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvį, gautą perkirtus gretasienį plokštuma MNK; čia M, N ir K yra: a) briaunų BB_1, AA_1, AD taškai; b) briaunų CC_1, AD, BB_1 taškai.

I SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Ar teisingas teiginys: jei dvi tiesės neturi bendrų taškų, tai jos lygiagrečios?
2. Taškas M nėra tiesėje a. Kiek tiesių, nekertančių tiesės a, eina per tašką M? Kiek iš jų yra lygiagrečios su tiese a?
3. Tiesės a ir c lygiagrečios, o tiesės a ir b susikerta. Ar tiesės b ir c gali būti lygiagrečios?
4. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α. Ar tiesa, kad ta tiesė: a) nekerta nė vienos tiesės, esančios plokštumoje α; b) lygiagreti su kiekviena tiese, esančia plokštumoje α; c) lygiagreti su tam tikra tiese, esančia plokštumoje α?
5. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α. Kiek tiesių, esančių plokštumoje α, yra lygiagrečios su tiese a? Ar tos tiesės, esančios plokštumoje α, lygiagrečios viena su kita?
6. Tiesė a kerta plokštumą α. Ar plokštumoje α yra bent viena tiesė, lygiagreti su tiese a?
7. Viena iš dviejų lygiagrečių tiesių lygiagreti su tam tikra plokštuma. Ar teisingas teiginys: antroji tiesė lygiagreti su ta plokštuma?
8. Ar teisingas teiginys: jei dvi tiesės lygiagrečios su tam tikra plokštuma, tai tos tiesės lygiagrečios?
9. Dvi tiesės lygiagrečios su tam tikra plokštuma. Ar tos tiesės: a) gali susikirsti; b) gali būti prasilenkiančios?
10. Ar prasilenkiančios tiesės a ir b gali būti lygiagrečios su tiese c?
11. Trapecijos šoninės kraštinės lygiagrečios su plokštuma α. Ar plokštuma α ir trapecijos plokštuma lygiagrečios?
12. Dvi lygiagretainio kraštinės lygiagrečios su plokštuma α. Ar plokštuma α ir lygiagretainio plokštuma lygiagrečios?
13. Ar dvi nelygiagrečios atkarpos, esančios tarp lygiagrečių plokštumų, gali būti lygios?
14. Ar yra toks tetraedras, kurio sienų penki kampai yra statūs?
15. Ar yra toks gretasienis, kurio: a) tik viena siena — stačiakampis; b) tik dvi gretimos sienos — rombai; c) visų sienų kampai smailieji; d) visi sienų kampai statieji; e) sienų visų smailiųjų kampų skaičius nelygus sienų visų bukųjų kampų skaičiui?
16. Kokie daugiakampiai gali būti: a) tetraedro pjūviai; b) gretasienio pjūviai?

Papildomi uždaviniai

88. Lygiagrečios tiesės AC ir BD plokštumą α kerta taškuose A ir B. Taškai C ir D yra vienoje plokštumos α pusėje, $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm, $AB = 4$ cm. a) Įrodykite, kad tiesė CD kerta plokštumą α tam tikrame taške E. b) Raskite atkarpą BE.

89. Taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Trikampių ABC ir CBD pusiaukraštinės susikerta taškuose M_1 ir M_2. Įrodykite, kad atkarpos AD ir M_1M_2 lygiagrečios.

90. Trapecijos $ABCD$ viršūnės A ir B yra plokštumoje α, o viršūnės C ir D nėra toje plokštumoje. Kokia tiesės CD padėtis plokštumos α atžvilgiu, kai atkarpa AB yra: a) trapecijos pagrindas; b) trapecijos šoninė kraštinė?

91. Per kiekvieną iš dviejų lygiagrečių tiesių a ir b bei tašką M, nesantį tų tiesių plokštumoje, išvesta plokštuma. Įrodykite, kad tos plokštumos susikerta tiese, lygiagrečia su tiesėmis a ir b.

92. Plokštuma α ir tiesė a lygiagrečios su tiese b. Įrodykite, kad tiesė a arba lygiagreti su plokštuma α, arba yra joje.

93. Tiesės a ir b lygiagrečios. Per tiesės a tašką M išvesta tiesė MN, nesutampanti su tiese a ir nekertanti tiesės b. Kokia tiesių MN ir b tarpusavio padėtis?

94. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės ir tose tiesėse nesantis taškas B. Ar plokštumos, kurių kiekviena eina per vieną iš tiesių ir tašką B, susikerta? Atsakymą pagrįskite.

95. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α. Įrodykite, kad jei plokštuma β kerta tiesę a, tai ji kerta ir plokštumą α.

96. Įrodykite, kad lygiagrečių tiesių atkarpos, esančios tarp plokštumos ir su ja lygiagrečios tiesės, lygios.

97. Įrodykite, kad du kampai, kurių atitinkamos kraštinės lygiagrečios, arba lygūs, arba jų suma lygi $180°$.

98. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α. Ar yra plokštuma, einanti per tiesę a ir lygiagreti su plokštuma α? Jei yra, tai kiek tokių plokštumų? Atsakymą pagrįskite.

99. Įrodykite, kad trys lygiagrečios plokštumos bet kuriose dviejose tas plokštumas kertančiose tiesėse iškerta proporcingas atkarpas.

100. Duotos dvi prasilenkiančios tiesės ir taškas A. Įrodykite, kad per tašką A eina tik viena plokštuma, kuri arba lygiagreti su tomis tiesėmis, arba eina per vieną jų ir lygiagreti su kita.

101. Įrodykite, kad atkarpos, jungiančios tetraedro priešingų briaunų vidurio taškus, susikerta, o susikirtimo taškas kiekvieną jų dalija pusiau.

102. Įrodykite, kad plokštuma α, einanti per tetraedro pagrindo dviejų briaunų vidurio taškus ir pagrindui nepriklausančią viršūnę, lygiagreti su trečia pagrindo briauna. Raskite tetraedro pjūvio, gauto tetraedrą perkirtus plokštuma α, perimetrą ir plotą, kai visų tetraedro briaunų ilgiai lygūs 20 cm.

103. Tetraedro $DABC$ briaunose DA, DB ir DC pažymėti taškai M, N ir P; $DM : MA = DN : NB = DP : PC$. Įrodykite, kad plokštumos MNP ir ABC lygiagrečios. Raskite trikampio MNP plotą, kai trikampio ABC plotas lygus 10 cm^2 ir $DM : MA = 2 : 1$.

104. Tetraedro $ABCD$ briaunoje AB pažymėkite tašką M. Nubraižykite tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su tiesėmis AC bei BD.

105. Tetraedro $DABC$ briaunose BD ir CD pažymėkite taškus M ir N, o sienoje ABC vidaus tašką K. Nubraižykite tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma MNK.

106. Tetraedro $DABC$ briaunoje DC pažymėkite tašką K, o sienose ABC ir ACD — taškus M ir N. Nubraižykite tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma MNK.

107. Tetraedro $ABCD$ briaunoje AB pažymėkite tašką M. Nubraižykite tetraedro pjūvį, gautą tetraedrą perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su siena BDC.

108*. Tetraedro $DABC$ trijų kampų prie viršūnės D pusiaukampinės kerta atkarpas BC, CA ir AB taškuose A_1, B_1 ir C_1. Įrodykite, kad atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

109. Dvi plokštumos, kurių kiekvienoje yra dvi gretasienio šoninės briaunos, nesančios vienoje sienoje, susikerta tiese a. Įrodykite, kad tiesė a lygiagreti su gretasienio šoninėmis briaunomis ir kerta visas gretasienio įstrižaines.

110. Įrodykite, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ plokštuma A_1DB lygiagreti su plokštuma D_1CB_1.

111. Įrodykite, kad gretasienio įstrižainė mažesnė už jo trijų briaunų, turinčių bendrą viršūnę, sumą.

112. Įrodykite, kad gretasienio keturių įstrižainių kvadratų suma lygi jo dvylikos briaunų kvadratų sumai.

113. Kuria tiese susikerta gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pjūvių A_1BCD_1 ir BDD_1B_1 plokštumos?

114. Pažymėkite gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos AB tašką M. Nubraižykite gretasienio pjūvį, gautą gretasienį perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su plokštuma ACC_1.

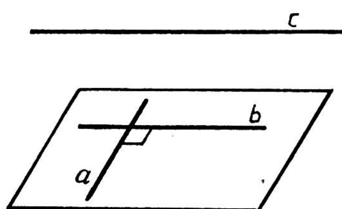
115. Taškas M yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje BC. Nubraižykite to gretasienio pjūvį, gautą gretasienį perkirtus plokštuma, einančia per tašką M ir lygiagrečia su plokštuma BDC_1.

3. 780

II SKYRIUS

TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

§ 1. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS STATMENUMAS

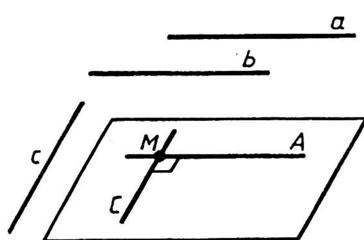


43 pav.

15. Statmenosios tiesės erdvėje. *Statmenosiomis* (viena kitai statmenomis) *tiesėmis* vadinamos dvi tiesės, kurios sudaro 90° kampą. Tiesių a ir b statmenumas žymimas šitaip: $a \perp b$. Statmenosios tiesės gali kirstis, gali būti prasilenkiančios. 43 paveiksle statmenosios tiesės a ir b susikerta, o statmenosios tiesės a ir c prasilenkia.

Įrodysime dviejų lygiagrečių tiesių statmenumo trečiai tiesei lemą.

> L e m a. ***Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių statmena trečiai tiesei, tai ir kita tiesė statmena tai tiesei.***



44 pav.

Į r o d y m a s. Sakykime, $a \parallel b$ ir $a \perp c$. Įrodysime, kad $b \perp c$. Per bet kurį erdvės tašką M, nesantį nė vienoje tų tiesių, išveskime tieses MA ir MC, lygiagrečias su tiesėmis a ir c (44 pav.). Kadangi $a \perp c$, tai $\angle AMC = 90^\circ$.

Remdamiesi lemos sąlyga, teigiame, kad $b \parallel a$, o remdamiesi brėžimu, — $a \parallel MA$, todėl $b \parallel MA$. Taigi tiesės b ir c lygiagrečios su tiesėmis MA ir MC, o kampas tarp tiesių MA ir MC lygus 90°. Iš to išeina, kad kampas tarp tiesių b ir c irgi lygus 90°, t. y. $b \perp c$. Lema įrodyta.

16. Lygiagrečiosios tiesės, statmenos plokštumai

A p i b r ė ž i m a s. *Tiesė, kuri statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje, vadinama tai plokštumai stãtmena tiesè.*

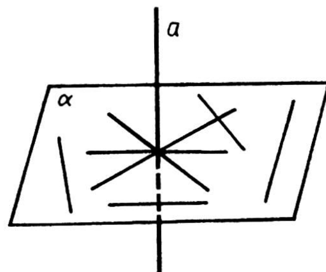
Tiesės a ir plokštumos α statmenumas žymimas šitaip: $a \perp \alpha$. Dar sakoma, kad *plokštuma* α *statmena tiesei* a.

Jei tiesė a yra statmena plokštumai α, tai ji kerta tą plokštumą. Įrodysime. Jei tiesė a nekirstų plokštumos α, tai ji arba būtų toje plokštumoje, arba būtų su ja lygiagreti. Tačiau tada plokštumoje α būtų tiesių, nestatmenų tiesei a, pavyzdžiui, su ja lygiagrečių, o tai prieštarauja tiesės ir plokštumos statmenumo apibrėžimui. Vadinasi, tiesė a kerta plokštumą α.

45 paveiksle pavaizduota tiesė a, statmena plokštumai α.

Mūsų aplinkoje yra daug tiesės ir plokštumos statmenumo pavyzdžių. Nepakrypęs telefono stulpas statmenas žemės plokštumai, pastato kolonos — pamatų plokštumai, sienų susikirtimo linijos — grindų plokštumai ir t. t.

Įrodysime dvi teoremas, atskleidžiančias tiesių ir plokštumos lygiagretumo ir statmenumo ryšį.

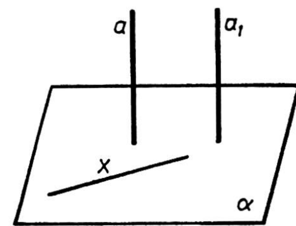


45 pav.

T e o r e m a. ***Jei viena iš dviejų lygiagrečių tiesių yra statmena plokštumai, tai ir kita tiesė statmena tai plokštumai.***

Į r o d y m a s. Nagrinėkime dvi lygiagrečias tieses a ir a_1 bei plokštumą α. Sakykime, $a \perp \alpha$. Įrodysime, kad $a_1 \perp \alpha$.

Plokštumoje α išveskime kurią nors tiesę x (46 pav.). Kadangi $a \perp \alpha$, tai $a \perp x$. Remdamiesi dviejų lygiagrečių tiesių statmenumo trečiai tiesei lema, teigiame, kad $a_1 \perp x$. Taigi tiesė a_1 statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje α, t. y. $a_1 \perp \alpha$. Teorema įrodyta.

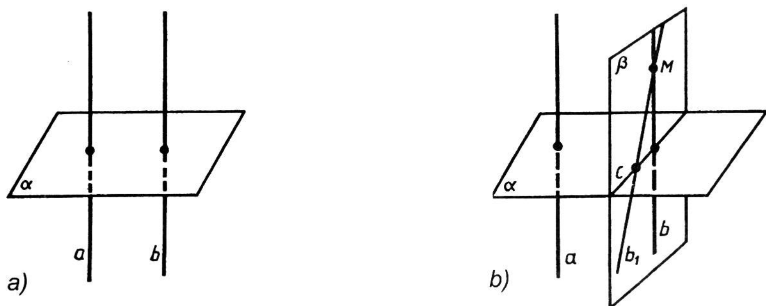


46 pav.

Įrodysime atvirkštinę teoremą.

T e o r e m a. ***Jei dvi tiesės statmenos plokštumai, tai jos lygiagrečios.***

Į r o d y m a s. Nagrinėkime tieses a ir b, statmenas plokštumai α (47 pav., a). Įrodysime, kad $a \parallel b$.



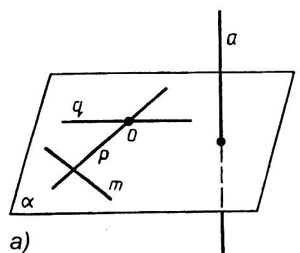
47 pav.

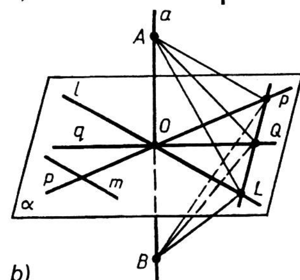
Per tiesės b kurį nors tašką M išveskime tiesę b_1, lygiagrečią su tiese a. Pagal prieš tai įrodytą teoremą $b_1 \perp \alpha$. Įrodysime, kad tiesė b_1 sutampa su tiese b. Tuo pačiu bus įrodyta, kad $a \parallel b$. Tarkime, kad tiesės b ir b_1 nesutampa. Tada tiesių b ir b_1 nusakytoje plokštumoje β per tašką M eina dvi tiesės, statmenos tiesei c, kuria kertasi plokštumos α ir β (47 pav., b). Tačiau taip negali būti. Vadinasi, $a \parallel b$. Teorema įrodyta.

17. Tiesės ir plokštumos statmenumo požymis

T e o r e m a. ***Jei tiesė statmena dviem susikertančioms tiesėms, esančioms plokštumoje, tai ji statmena tai plokštumai.***

Į r o d y m a s. Nagrinėkime tiesę a, kuri statmena tiesėms p ir q, esančioms plokštumoje α ir susikertančioms taške O (48 pav., a). Įrodysime, kad $a \perp \alpha$. Tačiau pirma reikia įrodyti, kad tiesė a statmena kiekvienai plokštumos α tiesei m.





48 pav.

Pirmiausia išnagrinėkime atvejį, kai tiesė a eina per tašką O (48 pav., b). Per tašką O išveskime tiesę l, lygiagrečią su tiese m (jei tiesė m eina per tašką O, vietoj tiesės l pasirinkime pačią tiesę m). Tiesėje a pažymėkime taškus A ir B, kad O būtų atkarpos AB vidurio taškas. Plokštumoje α išveskime tiesę, kertančią tieses p, q ir l taškuose P, Q ir L. Laikysime, kad taškas Q yra tarp taškų P ir L (žr. 48 pav., b).

Kadangi tiesės p ir q yra atkarpos AB vidurio statmenys, tai $AP = BP$ ir $AQ = BQ$. Vadinasi, $\Delta APQ = \Delta BPQ$ (pagal tris kraštines). Iš to gauname $\angle APQ = \angle BPQ$.

Dabar palyginkime trikampius APL ir BPL. Jie lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų ($AP = BP$, PL — bendra kraštinė, $\angle APL = \angle BPL$), todėl $AL = BL$. Tai reiškia, kad trikampis ABL lygiašonis, todėl jo pusiaukraštinė LO yra ir aukštinė, t. y. $l \perp a$. Kadangi $l \parallel m$ ir $l \perp a$, tai $m \perp a$

(remiantis dviejų lygiagrečių tiesių statmenumo trečiai tiesei lema). Taigi tiesė a statmena plokštumos α kiekvienai tiesei m, t. y. $a \perp \alpha$.

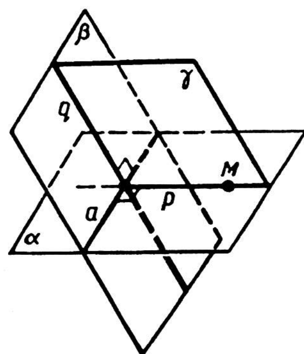
Dabar išnagrinėkime atvejį, kai tiesė a neina per tašką O. Per tašką O išveskime tiesę a_1, lygiagrečią su tiese a. Pagal įrodytą lemą $a_1 \perp p$ ir $a_1 \perp q$. Remiantis tuo, kas įrodyta pirmuoju atveju, $a_1 \perp \alpha$. Iš čia (remiantis 16 skyrelio pirmąja teorema) išplaukia, kad $a \perp \alpha$. Teorema įrodyta.

Taikydami tiesės ir plokštumos statmenumo požymį, išspręsime šitokį uždavinį.

U ž d a v i n y s. *Reikia įrodyti, kad per kiekvieną erdvės tašką eina turimai tiesei statmena plokštuma.*

S p r e n d i m a s. Turimą tiesę pažymėkime raide a, o bet kurį erdvės tašką — raide M. Įrodysime, kad yra plokštuma, einanti per tašką M ir statmena tiesei a.

Per tiesę a išveskime dvi plokštumas (α ir β), kurių viena eitų per tašką M: $M \in \alpha$ (49 pav.)*. Plokštumoje α per tašką M išveskime tiesę p, statmeną tiesei a, o plokštumoje β per tiesių p ir a susikirtimo tašką — tiesę q, statmeną tiesei a. Nagrinėkime plokštumą γ, einančią per tieses p ir q. Plokštuma γ yra ieškomoji plokštuma, nes tiesė a statmena dviem susikertančioms tos plokštumos tiesėms p ir q.



49 pav.

P a s t a b a. Galima įrodyti, kad γ yra vienintelė plokštuma, einanti per tašką M ir statmena tiesei a (133 uždavinys).

18. Tiesės, statmenos plokštumai, teorema

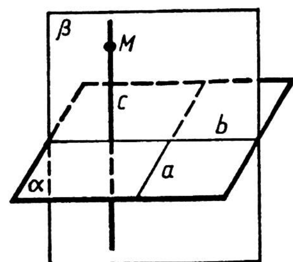
T e o r e m a. ***Per kiekvieną erdvės tašką eina turimai plokštumai statmena tiesė, tačiau tik viena.***

Į r o d y m a s. Nagrinėjamą plokštumą pažymėkime raide α, o bet kurį erdvės tašką — raide M. Įrodysime, kad:

1. Per tašką M eina tiesė, statmena plokštumai α.

2. Tokia tiesė tik viena.

1. Plokštumoje α išveskime bet kurią tiesę a. Nagrinėkime plokštumą β, einančią per tašką M ir statmeną tiesei a (50 pav.). Plokštumų α ir β susikirtimo tiesę pažymėkime raide b. Plokštumoje β per tašką M išveskime tiesę c, statmeną tiesei b. Tiesė c yra ieškomoji tiesė. Ji statmena plokštumai α, nes statmena dviem susikertančioms tos plokštumos tiesėms ($c \perp b$, nes taip brėžėme, $c \perp a$, nes $\beta \perp a$).



50 pav.

* 49 paveiksle pavaizduotas tas atvejis, kai taškas M nėra tiesėje a. Tačiau pateiktas uždavinio sprendimas tinka ir tuo atveju, kai taškas M yra tiesėje a.

2. Tarkime, kad per tašką M eina dar viena tiesė (ją pažymėkime c_1), statmena plokštumai α. Tada (remdamiesi 16 skyrelio atvirkštine teorema) gautume $c_1 \parallel c$. Taip negali būti, nes tiesės c_1 ir c susikerta taške M. Taigi per tašką M eina tik viena tiesė, statmena plokštumai α. Teorema įrodyta.

Uždaviniai

116. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite:
a) $DC \perp B_1C_1$ ir $AB \perp A_1D_1$, kai $\angle BAD = 90^\circ$;
b) $AB \perp CC_1$ ir $DD_1 \perp A_1B_1$, kai $AB \perp DD_1$.

117. Tetraedro $ABCD$ briaunos BC ir AD viena kitai statmenos: $BC \perp AD$. Įrodykite, kad $AD \perp MN$; čia M ir N — briaunų AB ir AC vidurio taškai.

118. Taškai A, M ir O yra plokštumai α statmenoje tiesėje, o taškai O, B, C ir D — plokštumoje α. Kurie čia išvardytų kampų yra statieji: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

119. Tiesė OA statmena plokštumai OBC, o taškas O yra atkarpos AD vidurys. Įrodykite, kad: a) $AB = DB$; b) $AB = AC$, kai $OB = OC$; c) $OB = OC$, kai $AB = AC$.

120. Kvadrato kraštinė lygi a. Per kvadrato įstrižainių susikirtimo tašką O išvesta tiesė OK, statmena kvadrato plokštumai. Raskite atstumą nuo taško K iki kvadrato viršūnių, kai $OK = b$.

121. Trikampio ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm, CM — pusiaukraštinė. Per viršūnę C išvesta tiesė CK, statmena trikampio ABC plokštumai; $CK = 12$ cm. Raskite KM.

122. Tiesė CD statmena taisyklingojo trikampio ABC plokštumai. Per to trikampio centrą O išvesta tiesė OK, lygiagreti su tiese CD. Yra žinoma, kad $AB = 16\sqrt{3}$ cm, $OK = 12$ cm, $CD = 16$ cm. Raskite atstumus nuo taškų D ir K iki trikampio viršūnių A ir B.

123. Įrodykite, kad jei dvi plokštumos α ir β statmenos tiesei a, tai jos lygiagrečios.

S p r e n d i m a s. Išveskime kurią nors tiesę a, kertančią plokštumas α ir β skirtinguose taškuose A ir B. Remdamiesi 16 skyrelio pirmąja teorema, teigiame, kad plokštumos α ir β statmenos tiesei AB.

Jei tarsime, kad plokštumos α ir β nelygiagrečios, t. y. turi nors vieną bendrą tašką M, tai gausime trikampį ABM, kurio du kampai A ir B statūs, o taip negali būti. Vadinasi, $\alpha \parallel \beta$.

124. Tiesė PQ lygiagreti su plokštuma α. Per taškus P ir Q išvestos plokštumai α statmenos tiesės, kurios ją kerta taškuose P_1 ir Q_1. Įrodykite, kad $PQ = P_1Q_1$.

125. Per tiesės PQ taškus P ir Q išvestos tiesės, statmenos plokštumai α ir kertančios ją taškuose P_1 ir Q_1. Raskite P_1Q_1, kai $PQ = 15$ cm, $PP_1 = 21{,}5$ cm, $QQ_1 = 33{,}5$ cm.

126. Tiesė MB statmena trikampio ABC kraštinėms AB ir BC, D — bet kuris tiesės AC taškas. Nustatykite trikampio MBD rūšį.

127. Trikampio ABC kampų A ir B suma lygi 90°. Tiesė BD statmena plokštumai ABC. Įrodykite, kad $CD \perp AC$.

128. Per lygiagretainio $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašką O išvesta tiesė OM; $MA = MC$, $MB = MD$. Įrodykite, kad tiesė OM statmena lygiagretainio plokštumai.

129. Tiesė AM statmena kvadrato $ABCD$ plokštumai. Kvadrato įstrižainės susikerta taške O. Įrodykite, kad: a) tiesė BD statmena plokštumai AMO; b) $MO \perp BD$.

130. Per kvadrato $ABCD$ viršūnę B išvesta tiesė BM. Yra žinoma, kad $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$, $MB = m$, $AB = n$. Raskite atstumus nuo taško M iki: a) kvadrato viršūnių; b) tiesių AC ir BD.

131. Taškas M — tetraedro $ABCD$ briaunos BC vidurio taškas, $AB = AC$, $DB = DC$. Įrodykite, kad trikampio ADM plokštuma statmena tiesei BC.

132. Įrodykite, kad jei viena iš dviejų lygiagrečių plokštumų statmena tiesei, tai ir kita plokštuma statmena tai tiesei.

133. Įrodykite, kad per kiekvieną erdvės tašką eina tik viena plokštuma, statmena turimai tiesei.

S p r e n d i m a s. Remiantis 17 skyrelio uždaviniu, galima teigti, kad per tašką M eina plokštuma α, statmena tiesei a. Tarkime, kad per tašką M eina dar viena plokštuma α_1, statmena tai tiesei. Tada plokštumos α ir α_1 lygiagrečios (žr. 123 uždavinį). Tačiau taip negali būti, nes tos plokštumos turi bendrą tašką M. Vadinasi, prielaida neteisinga, taigi per tašką M eina tik viena plokštuma, statmena tiesei a.

134. Įrodykite, kad visos tiesės, einančios per tiesės a tašką M ir statmenos tai tiesei, yra plokštumoje, einančioje per tašką M ir statmenoje tiesei a.

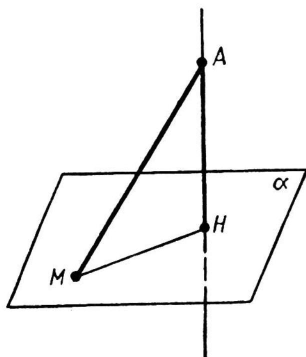
135. Tiesė a statmena plokštumai α ir tiesei b, nesančiai toje plokštumoje. Įrodykite, kad $b \parallel \alpha$.

136. Įrodykite, kad jei taškas X vienodai nutolęs nuo atkarpos AB galų, tai jis yra plokštumoje, einančioje per atkarpos AB vidurio tašką ir statmenoje tiesei AB.

137. Įrodykite, kad per kiekvieną iš dviejų viena kitai statmenų prasilenkiančiųjų tiesių eina plokštuma, statmena kitai tiesei.

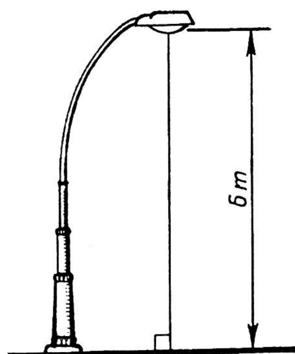
§ 2. STATMUO IR PASVIROSIOS. KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

19. Atstumas nuo taško iki plokštumos. Nagrinėkime plokštumą α ir tašką A, nesantį toje plokštumoje. Per tašką A išveskime tiesę, statmeną plokštumai α. Tos tiesės ir plokštumos α susikirtimo tašką pažymėkime raide H (51 pav.). Atkarpa AH vadinama *stãtmeniu, nuléistu ìš tãško A į̃ plókštumą* α, o *tãškas H — tõ statmeñs pãgrindu*. Plokštumoje α pažymėkime kurį nors tašką M, nesutampantį su tašku H. Išveskime atkarpą AM. Ji vadinama *pasvirą́ja, ìšvesta ìš tãško A į̃ plókštumą* α, o *tãškas M — pasvirõsios pãgrindu*. Atkarpa HM vadinama *pasvirõsios projèkcija plokštumojè* α. Palyginkime statmenį AH ir pasvirąją AM. Kraštinė AH yra stačiojo trikampio AMH statinis, o kraštinė AM — įžambinė, todėl $AH < AM$. Taigi *statmuo, nuleistas iš taško į plokštumą, mažesnis už kiekvieną pasvirąją, išvestą iš to taško į tą pačią plokštumą.*



51 pav.

Vadinasi, iš visų atstumų nuo taško A iki skirtingų plokštumos α taškų mažiausias yra iki taško H. Tas atstumas, t. y. statmens, nuleisto iš taško A į plokštumą α, ilgis, vadinamas *atstumù nuõ tãško A iki plokštumõs* α. Sakydami, kad tam tikras daiktas, pavyzdžiui, gatvės šviestuvo lemputė, yra tam tikrame aukštyje, tarkime, 6 m nuo žemės, laikome, kad atstumas nuo lemputės iki žemės paviršiaus matuojamas išilgai statmens, išvesto nuo lemputės iki žemės paviršiaus (52 pav.).



52 pav.

P a s t a b o s. 1. Jei dvi plokštumos lygiagrečios, tai visi vienos plokštumos taškai vienodai nutolę nuo kitos plokštumos. Įsitikinsime. Nagrinėkime statmenis AA_0 ir MM_0, nuleistus iš plokštumos α bet kurių dviejų taškų A ir M į su ja lygiagrečią plokštumą β. Kadangi $AA_0 \perp \beta$ ir $MM_0 \perp \beta$, tai $AA_0 \parallel MM_0$. Iš čia išeina, kad $MM_0 = AA_0$ (11 skyrelio 2° savybė), t. y. atstumas nuo plokštumos α bet kurio taško iki plokštumos β lygus atkarpos AA_0 ilgiui. Akivaizdu, kad plokštumos β visi taškai tuo pačiu atstumu nutolę nuo plokštumos α.

Atstumas nuo vienos iš lygiagrečių plokštumų bet kurio taško iki kitos plokštumos vadinamas *atstumù tar̃p lygiagrečių̃ plokštumų̃*.

Jau minėjome, kad lygiagrečiųjų plokštumų pavyzdys yra kambario grindų ir lubų plokštumos. Visi lubų taškai nutolę per vienodą atstumą nuo grindų. Tas atstumas yra kambario aukštis.

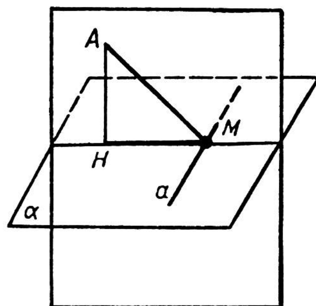
2. Jei tiesė lygiagreti su plokštuma, tai visi tiesės taškai yra vienodai nutolę nuo tos plokštumos (144 uždavinys). Tokiu atveju atstumas nuo tiesės bet kurio taško iki plokštumos vadinamas *atstumu tarp tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos.*

3. Jei dvi tiesės prasilenkia, tai, kaip įrodyta 7 skyrelyje, per kiekvieną jų eina plokštuma, lygiagreti su kita tiese, tačiau tik viena. Atstumas tarp vienos iš prasilenkiančiųjų tiesių ir plokštumos, einančios per kitą tiesę ir lygiagrečios su pirma tiese, vadinamas *atstumu tarp prasilenkiančiųjų tiesių.*

20. Trijų statmenų teorema

T e o r e m a. ***Tiesė, išvesta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena jos projekcijai toje plokštumoje, yra statmena ir pasvirajai.***

Į r o d y m a s. Pasinaudokime 53 paveikslu, kuriame atkarpa AH — statmuo plokštumai α, AM — pasviroji, a — tiesė, išvesta plokštumoje α per tašką M ir statmena pasvirosios projekcijai HM. Įrodysime, kad $a \perp AM$.



53 pav.

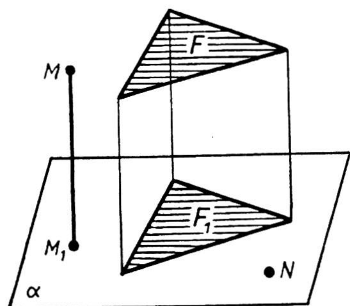
Nagrinėkime plokštumą AMH. Tiesė a statmena tai plokštumai, nes ji statmena dviem susikertančioms tiesėms AH ir MH ($a \perp HM$, nes taip duota sąlygoje, $a \perp AH$, nes $AH \perp \alpha$). Iš to išplaukia, kad tiesė a statmena kiekvienai plokštumos AMH tiesei, taigi ir $a \perp AM$. Teorema įrodyta.

Įrodytoji teorema vadinama *trijų statmenų teorema*, nes joje kalbama apie trijų statmenų AH, HM ir AM ryšį.

Teisinga ir a t v i r k š t i n ė t e o r e m a: *tiesė, išvesta plokštumoje per pasvirosios pagrindą ir statmena pasvirajai, yra statmena ir jos projekcijai.* Kaip įrodėme tiesioginę teoremą, pasinaudodami 53 paveikslu, panašiai įrodykite atvirkštinę (153 uždavinys).

21. Kampas tarp tiesės ir plokštumos. 19 skyrelyje apibrėžėme pasvirosios projekciją plokštumoje. Dabar apibrėšime bet kurios figūros projekciją*. *Taško projekcija plokštumoje vadinamas statmens, nuleisto iš*

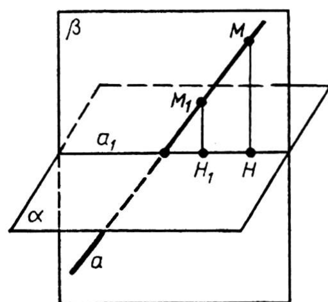
* Šiame skyrelyje kalbama apie figūros statmenąją projekciją. Bendresnė figūros lygiagrečiosios projekcijos sąvoka nagrinėjama 1 priede.



54 pav.

to taško į plokštumą, pagrindas, kai taškas nėra plokštumoje, ir pats taškas, kai jis yra plokštumoje. 54 paveiksle taškas M_1 — taško M projekcija plokštumoje α, o N — taško N projekcija toje pačioje plokštumoje ($N \in \alpha$).

Sakykime, F — kuri nors figūra erdvėje. Radę visų tos figūros taškų projekcijas plokštumoje, gausime figūrą F_1, kuri vadinama *figūros F projekcija* toje plokštumoje. 54 paveiksle trikampis F_1 — trikampio F projekcija plokštumoje α.



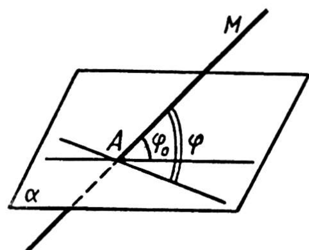
55 pav.

Įrodysime, kad *tiesės projekcija plokštumoje, nestatmenoje tai tiesei, yra tiesė.*

Plokštumą pažymėkime raide α, o tiesę, nestatmeną plokštumai α,— raide a (55 pav.). Iš kurio nors tiesės a taško M nuleiskime statmenį MH į plokštumą α. Nagrinėkime plokštumą β, einančią per a ir MH. Plokštumos α ir β susikerta tam tikra tiese a_1. Įrodysime, kad ta tiesė yra tiesės a projekcija plokštumoje α. Pasirinkime bet kurį tiesės a tašką M_1. Plokštumoje β išveskime tiesę M_1H_1, lygiagrečią su tiese MH (H_1 — tiesių M_1H_1 ir a susikirtimo taškas). Remdamiesi 16 skyrelio pirma teorema, rašome $M_1H_1 \perp \alpha$, todėl taškas H_1 yra taško M_1 projekcija plokštumoje α. Įrodėme, kad tiesės a kiekvieno taško projekcija yra tiesėje a_1. Panašiai įrodoma, kad tiesės a_1 kiekvienas taškas yra tiesės a tam tikro taško projekcija. Vadinasi, a_1 — tiesės a projekcija plokštumoje α.

Iš įrodyto teiginio išeina, kad atkarpos AB, nestatmenos plokštumai, projekcija yra atkarpa, kurios galai — taškų A ir B projekcijos. Pasvirosios projekcijos apibrėžimas (19 skyrelis) dera su bendru figūros projekcijos apibrėžimu.

Pavartodami tiesės projekcijos plokštumoje sąvoką, apibrėšime kampą tarp tiesės ir plokštumos.



56 pav.

A p i b r ė ž i m a s. *Kampu tarp tiesės ir plokštumos, kertančios tą tiesę ir jai nestatmenos, vadinamas kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje.*

Galima įrodyti, kad kampas φ_0 tarp tiesės AM ir plokštumos α (56 pav.) yra mažiausias iš

visų kampų φ, kuriuos ta tiesė sudaro su tiesėmis, išvestomis plokštumoje α per tašką A (162 uždavinys).

Kai tiesė statmena plokštumai, jos projekcija toje plokštumoje yra tiesės ir plokštumos susikirtimo taškas. Tokiu atveju laikoma, kad kampas tarp tiesės ir plokštumos lygus 90°.

Kai tiesė lygiagreti su plokštuma, tos tiesės projekcija plokštumoje yra su ja lygiagreti tiesė. Šiuo atveju kampo tarp tiesės ir plokštumos neapibrėšime. (Kartais susitariama kampą tarp tiesės ir su ja lygiagrečios plokštumos laikyti lygiu 0°.)

Uždaviniai

138. Iš kurio nors taško į plokštumą nuleistas statmuo ir išvesta pasviroji. Kampas tarp jų lygus φ. a) Raskite pasvirąją ir jos projekciją plokštumoje, kai statmuo lygus d. b) Raskite statmenį ir pasvirosios projekciją, kai pasviroji lygi m.

139. Iš kurio nors taško į plokštumą išvestos dvi pasvirosios. Įrodykite šiuos teiginius: a) jei pasvirosios lygios, tai ir jų projekcijos lygios; b) jei pasvirųjų projekcijos lygios, tai ir pasvirosios lygios; c) jei pasvirosios nelygios, tai ilgesniosios pasvirosios projekcija ilgesnė.

140. Iš taško A, nepriklausančio plokštumai α, į tą plokštumą nuleistas statmuo AO bei išvestos pasvirosios AB ir AC; $\angle OAB = \angle BAC = 60^\circ$, $AO = 1{,}5$ cm. Raskite atstumą tarp pasvirųjų pagrindų.

141. Vienas atkarpos galas yra plokštumoje α, o kitas nuo jos nutolęs per 6 cm. Raskite atstumą nuo tos atkarpos vidurio taško iki plokštumos α.

142. Atkarpos galai nuo plokštumos α nutolę per 1 cm ir 4 cm. Raskite atstumą nuo atkarpos vidurio taško iki plokštumos α.

143. Atstumas nuo taško M iki kiekvienos taisyklingojo trikampio ABC viršūnės lygus 4 cm. Raskite atstumą nuo taško M iki plokštumos ABC, kai $AB = 6$ cm.

144. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α. Įrodykite, kad tiesės a visi taškai yra vienodai nutolę nuo plokštumos α.

S p r e n d i m a s. Per kurį nors tiesės a tašką išveskime plokštumą β, lygiagrečią su plokštuma α (59 uždavinys). Tiesė a yra plokštumoje β, nes priešingu atveju ji kirstų plokštumą β, taigi ir plokštumą α (55 uždavinys), o taip negali būti. Plokštumos β visi taškai yra vienodai nutolę nuo plokštumos α, todėl ir tiesės a, esančios plokštumoje β, visi taškai yra vienodai nutolę nuo plokštumos α. Tai ir reikėjo įrodyti.

145. Stačiojo trikampio ABC kampas C status. Per viršūnę A išvesta tiesė AD, statmena trikampio plokštumai. a) Įrodykite, kad trikampis CBD statusis. b) Raskite BD, kai $BC = a$, $DC = b$.

146. Nestatmena plokštumai α tiesė a kerta ją taške M. Įrodykite, kad plokštumoje α per tašką M eina tiesė, statmena tiesei a, tačiau tik viena.

147. Iš taško M į stačiakampio $ABCD$ plokštumą nuleistas statmuo MB. Įrodykite, kad trikampiai AMD ir MCD statieji.

148. Tiesė AK statmena taisyklingojo trikampio ABC plokštumai, M — kraštinės BC vidurio taškas. Įrodykite, kad $MK \perp BC$.

149. Atkarpa AD statmena lygiašonio trikampio ABC plokštumai; $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 12$ cm. Raskite atstumus nuo atkarpos AD galų iki tiesės BC.

150. Per stačiakampio $ABCD$ viršūnę A išvesta tiesė AK, statmena stačiakampio plokštumai; $KD = 6$ cm, $KB = 7$ cm, $KC = 9$ cm. Raskite: a) atstumą nuo taško K iki stačiakampio $ABCD$ plokštumos; b) atstumą tarp tiesių AK ir CD.

151. Tiesė CD yra statmena trikampio ABC plokštumai. Įrodykite, kad: a) trikampis ABC yra trikampio ABD projekcija plokštumoje ABC; b) jei CH — trikampio ABC aukštinė, tai DH — trikampio ABD aukštinė.

152. Per kvadrato $ABCD$ viršūnę B išvesta tiesė BF, statmena kvadrato plokštumai. Raskite atstumus nuo taško F iki tiesių, kuriose yra kvadrato kraštinės ir įstrižainės, kai $BF = 8$ dm, $AB = 4$ dm.

153. Įrodykite, kad tiesė a, išvesta plokštumoje α per pasvirosios AM pagrindą M ir statmena pasvirajai, yra statmena pasvirosios projekcijai HM (žr. 53 pav.).

S p r e n d i m a s. Tiesė a yra statmena plokštumai AMH, nes ji statmena tos plokštumos dviem susikertančioms tiesėms ($a \perp AM$ — duota sąlygoje, $a \perp AH$, nes $AH \perp \alpha$). Iš čia išeina, kad tiesė a statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje AMH, taigi ir $a \perp HM$. Tai ir reikėjo įrodyti.

154. Tiesė BD statmena trikampio ABC plokštumai; $BD = 9$ cm, $AC = 10$ cm, $BC = BA = 13$ cm. Raskite: a) atstumą nuo taško D iki tiesės AC; b) trikampio ACD plotą.

155. Per lygiašonio stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnę C išvesta tiesė CM, statmena trikampio plokštumai. Raskite atstumą nuo taško M iki tiesės AB, kai $AC = 4$ cm, $CM = 2\sqrt{7}$ cm.

156. Vienas stačiojo trikampio ABC statinis lygus m, o prie to statinio esantis smailusis kampas φ. Per stačiojo kampo viršūnę C išvesta tiesė CD, statmena to trikampio plokštumai; $CD = n$. Raskite atstumą nuo taško D iki tiesės AB.

157. Rombo $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O. Tiesė OK yra statmena rombo plokštumai. a) Įrodykite, kad atstumai nuo taško K iki tiesių, kuriose yra rombo kraštinės, lygūs. b) Apskaičiuokite tą atstumą, kai OK = 4,5 dm, AC = 6 dm, BD = 8 dm.

158. Per rombo $ABCD$ viršūnę B išvesta tiesė BM, statmena rombo plokštumai. Raskite atstumus nuo taško M iki tiesių, kuriose yra rombo kraštinės, kai AB = 25 cm, $\angle BAD = 60^\circ$, BM = 12,5 cm.

159. Tiesė BM statmena stačiakampio $ABCD$ plokštumai. Įrodykite, kad plokštumų ADM ir BCM susikirtimo tiesė statmena plokštumai ABM.

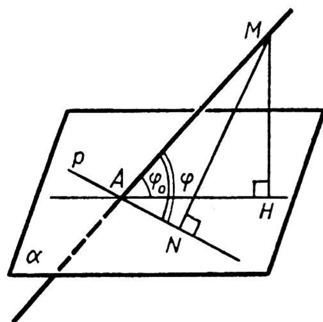
160. Atkarpos AB galai yra dviejose lygiagrečiose plokštumose, atstumas tarp tų plokštumų lygus d, o $d < AB$. Įrodykite, kad atkarpõs AB projekcijos tose plokštumose lygios. Raskite tas projekcijas, kai AB = 13 cm, d = 5 cm.

161. Spindulys BA nėra neištiestinio kampo CBD plokštumoje. Įrodykite, kad jei $\angle ABC = \angle ABD$, o $\angle ABC < 90^\circ$, tai spindulio BA projekcija plokštumoje CBD yra kampo CBD pusiaukampinė.

162. Tiesė MA eina per plokštumos α tašką A ir su ta plokštuma sudaro kampą $\varphi_0 \neq 90^\circ$. Įrodykite, kad φ_0 yra mažiausias iš kampų, kuriuos tiesė MA sudaro su tiesėmis, esančiomis plokštumoje α ir einančiomis per tašką A.

S p r e n d i m a s. Statmens, nuleisto iš taško M į plokštumą α, pagrindą pažymėkime raide H. Nagrinėkime plokštumos α bet kurią tiesę p, einančią per tašką A ir nesutampančią su tiese AH (57 pav.). Kampą tarp tiesių AM ir p pažymėkime raide φ. Įrodysime, kad $\varphi > \varphi_0$.

Iš taško M nuleiskime statmenį MN į tiesę p. Jei taškas N sutampa su tašku A, tai $\varphi = 90^\circ$, todėl $\varphi > \varphi_0$. Išnagrinėkime atvejį, kai taškai A ir N nesutampa (žr. 57 pav.). Atkarpa AM — stačiųjų trikampių ANM ir AHM bendra įžambinė, todėl $\sin\varphi = \dfrac{MN}{AM}$, $\sin\varphi_0 = \dfrac{MH}{AM}$. Kadangi $MN >$ $> MH$ (MN — pasviroji, MH — statmuo), tai iš tų dviejų lygybių išplaukia, kad $\sin\varphi > \sin\varphi_0$, todėl $\varphi > \varphi_0$.



57 pav.

163. Pasviroji AM, išvesta iš taško A į plokštumą, lygi d. Raskite tos pasvirosios projekciją plokštumoje, kai kampas tarp tiesės AM ir plokštumos lygus: a) 45°; b) 60°; c) 30°.

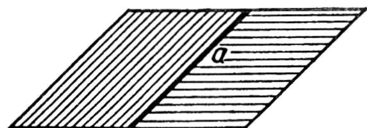
164. Kampas tarp plokštumos α ir į ją išvestos pasvirosios yra φ. Pasvirosios projekcija plokštumoje dukart trumpesnė už pasvirąją. Raskite φ.

165. Atstumas nuo taško A iki plokštumos γ lygus d. Iš taško A 30° kampu į plokštumą išvestos pasvirosios AB ir AC. Jų projekcijos plokštumoje γ sudaro 120° kampą. Raskite BC.

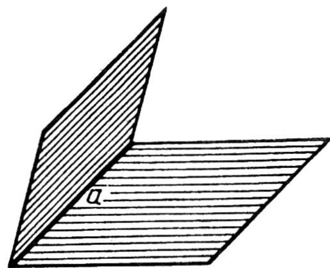
§ 3. DVISIENIS KAMPAS. PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

22. Dvisienis kampas. Kampu plokštumoje vadiname figūrą, kurią sudaro du spinduliai, išeinantys iš vieno taško. Be šių kampų, stereometrijoje nagrinėjami dar vienos rūšies kampai — *dvisiẽniai kampaĩ*. Prieš apibrėždami dvisienį kampą, priminsime, kad kiekviena plokštumoje esanti tiesė tą plokštumą dalija į dvi pusplokštumes (58 pav., *a*). Įsivaizduokime, kad plokštumą perlenkėme išilgai tiesės *a* ir dvi pusplokštumės, kurių kraštas *a*, jau nėra vienoje plokštumoje (58 pav., *b*). Gautoji figūra yra dvisienis kampas. Taigi dvisienį kampą galima apibrėžti šitaip: *dvisieniu kampu vadinama figūra, kurią sudaro tiesė a bei dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kraštą a, bet nesančios vienoje plokštumoje.* Dvisienį kampą sudarančios pusplokštumės vadinamos *dvisiẽnio kam̃po síenomis*. Dvisienis kampas turi dvi sienas, todėl jis ir vadinamas dvisieniu. Pusplokštumių bendras kraštas — tiesė *a* — vadinamas *dvisiẽnio kam̃po briaunà*.

Aplinkoje matome nemažai dvisienio kampo formos daiktų. Tai dvišlaičiai pastatų stogai, pravertas segtuvas, kambario siena su grindimis ir t. t.



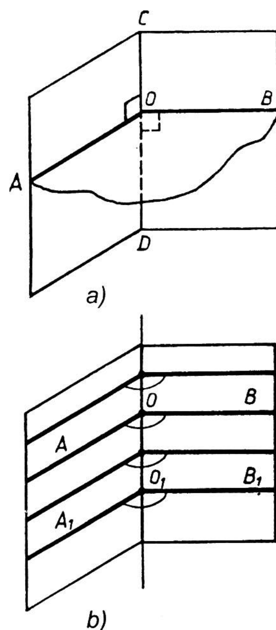
a) Tiesė *a* plokštumą dalija į dvi pusplokštumes.



b) Dvisienis kampas.

58 pav.

Žinome, kad kampai plokštumoje (įprasti kampai) matuojami laipsniais. O kaip matuojami dvisieniai kampai? Tai daroma šitaip. Dvisienio kampo briaunoje pažymėkime kurį nors tašką ir kiekvienoje sienoje iš to taško išveskime briaunai statmeną spindulį. Tų spindulių sudarytas kampas vadinamas *dvisiẽnio kam̃po tiesiniù kampù*. 59 paveiksle, *a*, kampas AOB yra dvisienio kampo, kurio briauna CD, tiesinis kampas. Kadangi $OA \perp CD$ ir $OB \perp CD$, tai plokštuma AOB statmena tiesei CD. Taigi tiesinio kampo plokštuma statmena dvisienio kampo briaunai. Akivaizdu, kad dvisienio kampo tiesinių kampų aibė yra begalinė (59 pav., *b*).

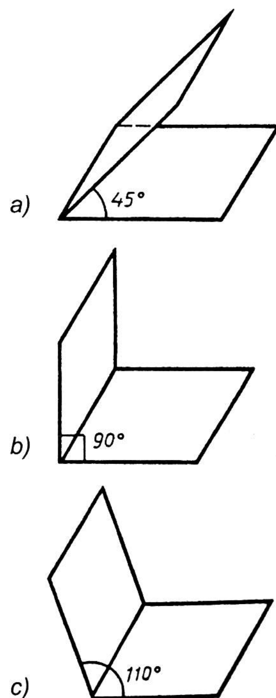


59 pav. Dvisienio kampo tiesinis kampas.

Įrodysime, kad *dvisienio kampo visi tiesiniai kampai lygūs*. Nagrinėkime du tiesinius kampus AOB ir $A_1O_1B_1$ (59 pav., *b*). Spinduliai OA ir O_1A_1 yra vienoje sienoje ir statmeni tiesei OO_1, todėl jie vienakrypčiai. Taip pat įsitikintume, kad spinduliai OB ir O_1B_1 vienakrypčiai. Vadinasi, $\angle A_1O_1B_1 =$ $= \angle AOB$ (kaip kampai, kurių kraštinės vienakryptės).

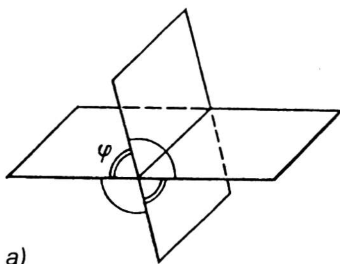
Dvisiẽnio kam̃po láipsniniu matù vadinamas jo tiesinio kampo laipsninis matas. 60 paveiksle, *a*, dvisienio kampo laipsninis matas lygus 45°. Dažnai sakoma trumpai: „Dvisienis kampas lygus 45°“.

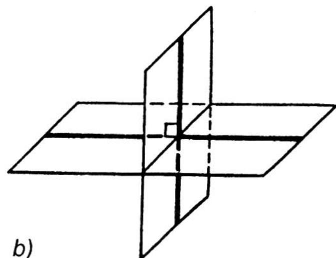
Dvisienis kampas vadinamas *stačiuoju (smailiuoju, bukuoju)*, kai jis lygus 90° (mažesnis už 90°, didesnis už 90°). 60 paveiksle, *b*, pavaizduotas statusis dvisienis kampas, 60 paveiksle, *a*, — smailusis, 60 paveiksle, *c*, — bukasis.



60 pav.

23. Dviejų plokštumų statmenumo požymis. Dvi susikertančios plokštumos sudaro keturis dvisienius kampus, turinčius tą pačią briauną (61 pav., *a*). Jei vienas tų dvisienių kampų lygus φ, tai kiti trys kampai lygūs $180^\circ - \varphi$, φ ir $180^\circ - \varphi$ (paaiškinkite kodėl). Skyrium imant, jei vienas kampas status ($\varphi = 90^\circ$), tai ir kiti trys kampai statūs. Sakykime, φ — kampas, ne didesnis už kiekvieną kitą iš trijų kampų. Tada sakoma, kad kampas tarp susikertančių plokštumų lygus φ. Aišku, $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$.





61 pav.

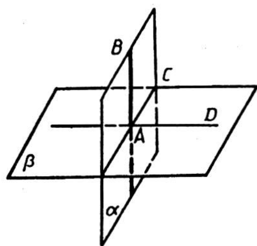
A p i b r ė ž i m a s. *Statmenomis (vienà kìtai statmenomìs) plokštumomis vadinamos dvi susikertančios plokštumos, kampas tarp kurių lygus* 90° (61 pav., *b*).

Viena kitai statmenų plokštumų pavyzdys yra kambario sienos ir grindų plokštumos, sienos ir lubų plokštumos.

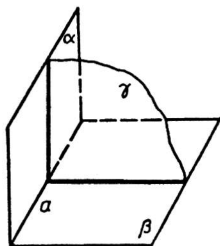
Aišku, visi keturi dvisieniai kampai, kuriuos sudaro viena kitai statmenos plokštumos, yra statūs.

Išnagrinėkime d v i e j ų p l o k š t u m ų s t a t m e n u m o p o ž y m į.

T e o r e m a. ***Jei viena iš dviejų plokštumų eina per tiesę, statmeną kitai plokštumai, tai tos plokštumos viena kitai statmenos.***



62 pav.



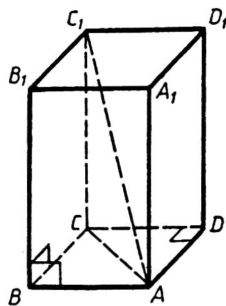
63 pav. Jei $\gamma \perp a$, tai $\gamma \perp \alpha$ ir $\gamma \perp \beta$.

Į r o d y m a s. Nagrinėkime plokštumas α ir β. Sakykime, plokštuma α eina per tiesę *AB*, kuri statmena plokštumai β ir kerta ją taške *A* (62 pav.). Įrodysime, kad $\alpha \perp \beta$. Plokštumos α ir β susikerta tam tikra tiese *AC*. Be to, $AB \perp AC$, nes pagal sąlygą $AB \perp \beta$, todėl tiesė *AB* statmena kiekvienai tiesei, esančiai plokštumoje β.

Plokštumoje β išveskime tiesę *AD*, statmeną tiesei *AC*. Tada kampas *BAD* yra dvisienio kampo, gauto susikirtus plokštumoms α ir β, tiesinis kampas. Tačiau $\angle BAD = 90°$ (nes $AB \perp \beta$). Vadinasi, kampas tarp plokštumų α ir β lygus 90°, t. y. $\alpha \perp \beta$. Teorema įrodyta.

I š v a d a. *Plokštuma, statmena dviejų plokštumų susikirtimo tiesei, yra statmena kiekvienai tų plokštumų* (63 pav.).

24. Stačiakampis gretasienis. *Stačiakampiù gretasieniù* vadinamas gretasienis, kurio šoninės briaunos statmenos pagrindui, o pagrindai — stačiakampiai. Kasdien matome daug stačiakampio gretasienio formos daiktų. Tai dėžutės, kambariai ir kt. 64 paveiksle pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Jo pagrindai yra stačiakampiai $ABCD$ ir $A_1B_1C_1D_1$, o šoninės briaunos AA_1, BB_1, CC_1 ir DD_1 statmenos pagrindams. Iš čia išeina, kad $AA_1 \perp AB$, vadinasi, šoninė siena AA_1B_1B — stačiakampis. Tą patį galima pasakyti ir apie kitas šonines sienas. Taigi pagrindėme šitokią stačiakampio gretasienio savybę.



64 pav. Stačiakampis gretasienis.

1°. *Stačiakampio gretasienio visos šešios sienos yra stačiakampiai.*

Pusplokštumės, kuriose yra gretasienio gretimos sienos, sudaro dvisienius kampus, kurie vadinami *gretasiẽnio dvisiẽniais kampaĩs.*

Savarankiškai įrodykite šitokią savybę.

2°. *Stačiakampio gretasienio visi dvisieniai kampai yra statūs.*

Dabar išnagrinėsime vieną nuostabiausių stačiakampio gretasienio savybių.

Stačiakampio gretasienio trijų briaunų, turinčių bendrą viršūnę, ilgiai vadinami *stačiakam̃pio gretasiẽnio matmenimìs.* Pavyzdžiui, AB, AD ir AA_1 yra 64 paveiksle pavaizduoto stačiakampio gretasienio matmenys.

Kai kalbame apie stačiakampio gretasienio formos kambario matmenis, vietoj žodžio „matmenys“ paprastai sakome: kambario ilgis, plotis ir aukštis. Aišku, kad kambario ilgis, plotis ir aukštis yra kambario matmenys.

Prieš formuluodami stačiakampio gretasienio savybę, susijusią su jo matmenimis, prisiminkime, kad stačiakampio įstrižainės kvadratas lygus jo gretimų kraštinių kvadratų sumai.

Stačiakampio gretimų kraštinių ilgius galima vadinti stačiakampio matmenimis. Todėl galima sakyti, kad *stačiakampio įstrižainės kvadratas lygus dviejų jo matmenų kvadratų sumai.* Įsitikinsime, kad tokia savybė būdinga ir stačiakampiam gretasieniui.

T e o r e m a. ***Stačiakampio gretasienio įstrižainės kvadratas lygus trijų jo matmenų kvadratų sumai.***

Į r o d y m a s. Pasinaudosime 64 paveikslu, kuriame pavaizduotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodysime, kad

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2. \quad (1)$$

Kadangi briauna CC_1 statmena pagrindui $ABCD$, tai kampas ACC_1 status. Iš stačiojo trikampio ACC_1, remdamiesi Pitagoro teorema, gauname:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Tačiau AC — stačiakampio $ABCD$ įstrižainė, todėl $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Be to, $CC_1 = AA_1$. Vadinasi,

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Teorema įrodyta.

I š v a d a. *Stačiakampio gretasienio įstrižainės lygios.*

Stačiakampis gretasienis, kurio visi trys matmenys lygūs, vadinamas *kubù*. Visos kubo sienos yra lygūs kvadratai.

Uždaviniai*

166. Nestatmenos plokštumos α ir β susikerta tiese MN. Plokštumoje β iš taško A nuleistas statmuo AB į tiesę MN. Iš to paties taško A nuleistas statmuo AC į plokštumą α. Įrodykite, kad $\angle ABC$ — dvisienio kampo $AMNC$ tiesinis kampas.

167. Tetraedro $DABC$ visos briaunos lygios, M — briaunos AC vidurio taškas. Įrodykite, kad $\angle DMB$ — dvisienio kampo $BACD$ tiesinis kampas.

168. Dvisienis kampas lygus φ. Vienoje to kampo sienoje yra taškas, nuo kitos sienos plokštumos nutolęs per atstumą d. Raskite atstumą nuo to taško iki dvisienio kampo briaunos.

169. Dviejų dvisienių kampų viena siena bendra, o kitos dvi sienos yra vienos plokštumos skirtingos pusplokštumės. Įrodykite, kad tų dvisienių kampų suma lygi $180°$.

170. Trikampio ABC kraštinė AC yra plokštumoje α. Iš viršūnės B į tą plokštumą nuleistas statmuo BB_1. Raskite atstumus nuo taško B iki tiesės AC ir iki plokštumos α, kai $AB = 2$ cm, $\angle BAC = 150°$ ir dvisienis kampas $BACB_1$ lygus $45°$.

171. Stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė yra plokštumoje α, o statinis pasviręs į tą plokštumą $30°$ kampu. Raskite kampą tarp plokštumos α ir trikampio plokštumos.

---

* Šio paragrafo uždaviniuose dvisienį kampą, kurio briauna AB ir kurio skirtingose sienose pažymėti taškai C ir D, trumpai vadinsime šitaip: dvisienis kampas $CABD$.

172. Stačiojo trikampio ABC kampas C status. Statinis AC yra plokštumoje α, o kampas tarp plokštumų α ir ABC lygus 60°. Raskite atstumą nuo taško B iki plokštumos α, kai $AC = 5$ cm, $AB = 13$ cm.

173. Tetraedro $ABCD$ briauna CD statmena plokštumai ABC, $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Raskite dvisienius kampus $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

174. Raskite tetraedro $ABCD$ dvisienį kampą $ABCD$, kai kampai DAB, DAC ir ACB statūs, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

175. Įrodykite, kad jei tetraedro visos briaunos lygios, tai visi jo dvisieniai kampai lygūs. Raskite tuos kampus.

176. Per rombo $ABCD$ kraštinę AD išvesta plokštuma ADM. Dvisienis kampas $BADM$ lygus 60°. Raskite rombo kraštinę, kai $\angle BAD = 45^\circ$ ir atstumas nuo taško B iki plokštumos ADM lygus $4\sqrt{3}$.

177. Įrodykite, kad plokštuma, statmena dviejų plokštumų susikirtimo tiesei, yra statmena kiekvienai tų plokštumų.

178. Plokštumos α ir β viena kitai statmenos ir kertasi tiese c. Įrodykite, kad kiekviena plokštumos α tiesė, statmena tiesei c, yra statmena ir plokštumai β.

S p r e n d i m a s. Plokštumoje α išveskime bet kurią tiesę AC, statmeną tiesei c ($C \in c$). Įrodysime, kad $CA \perp \beta$.

Plokštumoje β per tašką C išveskime tiesę CB, statmeną tiesei c. Kadangi $CA \perp c$ ir $CB \perp c$, tai $\angle ACB$ — vieno iš dvisienių kampų, kuriuos nusako plokštumos α ir β, tiesinis kampas. Pagal uždavinio sąlygą $\alpha \perp \beta$, todėl kampas ACB — status, t. y. $CA \perp CB$. Taigi tiesė CA statmena plokštumos β dviem susikertančioms tiesėms c ir CB, todėl $CA \perp \beta$.

179. Plokštumos α ir β yra viena kitai statmenos. Per plokštumos α tašką išvesta tiesė, statmena plokštumai β. Įrodykite, kad ta tiesė yra plokštumoje α.

180. Įrodykite, kad tai pačiai plokštumai statmenos plokštuma ir joje nesanti tiesė yra lygiagrečios.

181. Plokštumos α ir β susikerta tiese a. Iš taško M į plokštumas α ir β nuleisti statmenys MA ir MB. Tiesė a plokštumą AMB kerta taške C. Įrodykite, kad $MC \perp a$.

182. Viena kitai statmenos plokštumos α ir β susikerta tiese a. Iš taško M į tas plokštumas nuleisti statmenys MA ir MB. Tiesė a plokštumą AMB kerta taške C.

a) Įrodykite, kad keturkampis $ACBM$ yra stačiakampis.

b) Raskite atstumą nuo taško M iki tiesės a, kai $AM = m$, $BM = n$.

183. Plokštumos α ir β susikerta tiese a ir statmenos plokštumai γ. Įrodykite, kad tiesė a statmena plokštumai γ.

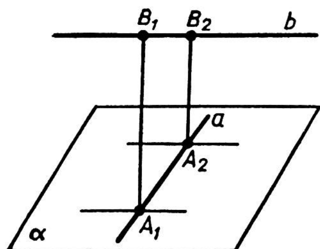
184. Trikampių ABC ir ABD bendra kraštinė AB lygi 10 cm. Tų trikampių plokštumos yra viena kitai statmenos. Raskite CD, kai tie trikampiai: a) lygiakraščiai; b) statieji lygiašoniai, o AB — įžambinė.

185. Tiesė a nestatmena plokštumai α. Įrodykite, kad yra plokštuma, einanti per tiesę a ir statmena plokštumai α.

S p r e n d i m a s. Per tiesės a bet kurį tašką M išveskime tiesę p, statmeną plokštumai α. Nagrinėkime plokštumą β, einančią per tieses a ir p. Plokštuma β yra ieškomoji plokštuma, nes ji eina per tiesę a ir pagal dviejų plokštumų statmenumo požymį yra statmena plokštumai α.

186. Įrodykite, kad yra vienintelė tiesė, kuri kerta dvi prasilenkiančias tieses a ir b ir statmena kiekvienai jų.

S p r e n d i m a s. Nagrinėkime plokštumą α, einančią per tiesę a ir lygiagrečią su tiese b. Per tieses a ir b išveskime plokštumas β ir γ, kad būtų $\beta \perp \alpha$ ir $\gamma \perp \alpha$ (185 uždavinys). Savarankiškai įrodykite, kad tiesė p, kuria kertasi plokštumos β ir γ, yra ieškomoji.



65 pav.

Įrodysime, kad p — vienintelė tiesė, tenkinanti uždavinio sąlygą. Tarkime, kad yra dvi tiesės A_1B_1 ir A_2B_2, kertančios duotas prasilenkiančias tieses a ir b ir statmenos kiekvienai jų (65 pav.). Tiesės A_1B_1 ir A_2B_2 statmenos plokštumai α (paaiškinkite kodėl), todėl jos lygiagrečios. Iš to išplaukia, kad prasilenkiančiosios tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje. Tai prieštarauja prasilenkiančiųjų tiesių apibrėžimui.

187. Raskite stačiakampio gretasienio įstrižainę, kai jo matmenys lygūs: a) 1, 1, 2; b) 8, 9, 12; c) $\sqrt{39}$, 7, 9.

188. Kubo briauna lygi a. Raskite kubo įstrižainę.

189. Raskite atstumą nuo kubo viršūnės iki bet kurios sienos, kurioje nėra ta viršūnė, plokštumos, kai: a) kubo sienos įstrižainė lygi m; b) kubo įstrižainė lygi d.

190. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite šiuos dvisienius kampus: a) ABB_1C; b) ADD_1B; c) A_1BB_1K, K — briaunos A_1D_1 vidurio taškas.

191. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad plokštumos ABC_1 ir A_1B_1D yra viena kitai statmenos.

192. Raskite kampo tarp kubo įstrižainės ir vienos jo sienos plokštumos tangentą.

193. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $D_1B = d$, $AC = m$, $AB = n$. Raskite atstumą tarp: a) tiesės A_1C_1 ir plokštumos ABC; b) plokštumų ABB_1 ir DCC_1; c) tiesės DD_1 ir plokštumos ACC_1.

194. Kubo briauna lygi a. Raskite atstumą tarp prasilenkiančių tiesių, kuriose yra: a) kubo įstrižainė ir kubo briauna; b) kubo įstrižainė ir kubo sienos įstrižainė.

195. Raskite stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ matmenis, kai $AC_1 = 12$ cm ir įstrižainė BD_1 su sienos AA_1D_1D plokštuma sudaro 30° kampą, o su briauna DD_1 — 45° kampą.

196. Pavaizduokite kubą $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ir nubraižykite jo pjūvį, gautą kubą perkirtus plokštuma: a) einančia per briauną AA_1 ir statmena plokštumai BB_1D_1; b) einančia per briauną AB ir statmena plokštumai CDA_1.

II SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Ar teisingas teiginys: jei dvi tiesės erdvėje statmenos trečiai tiesei, tai tos tiesės yra lygiagrečios? Ar teisingas šis teiginys, kai visos tiesės yra vienoje plokštumoje?
2. Lygiagrečios tiesės b ir c yra plokštumoje α, o tiesė a statmena tiesei b. Ar teisingi teiginiai: a) tiesė a statmena tiesei c; b) tiesė a kerta plokštumą α?
3. Tiesė a statmena plokštumai α, o tiesė b nestatmena tai plokštumai. Ar tiesės a ir b gali būti lygiagrečios?
4. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α, o tiesė b statmena tai plokštumai. Ar teisingas teiginys, kad tiesės a ir b viena kitai statmenos?
5. Tiesė a lygiagreti su plokštuma α, o tiesė b statmena tai plokštumai. Ar yra tiesė, statmena tiesėms a ir b?
6. Ar teisingas teiginys, kad visos tiesės, statmenos plokštumai ir kertančios tiesę, yra vienoje plokštumoje?
7. Ar dvi plokštumos, kurių kiekviena statmena trečiai plokštumai, gali būti: a) lygiagrečios; b) statmenos?
8. Ar per erdvės tašką galima išvesti tris plokštumas, kurių kiekvienos dvi viena kitai statmenos?
9. Kvadrato įstrižainė statmena plokštumai. Kokia kitos kvadrato įstrižainės padėtis tos plokštumos atžvilgiu?
10. Kiek dvisienių kampų turi: a) tetraedras; b) gretasienis?

Papildomi uždaviniai

197. Atkarpa BM yra statmena stačiakampio $ABCD$ plokštumai. Įrodykite, kad tiesė CD statmena plokštumai MBC.

198. Taškas A yra plokštumoje α, o taškas B nuo tos plokštumos nutolęs per 9 cm. Taškas M atkarpą AB dalija santykiu $4 : 5$ pradedant nuo taško A. Raskite atstumą nuo taško M iki plokštumos α.

199. Taškas S yra vienodai nutolęs nuo stačiojo trikampio viršūnių ir nėra to trikampio plokštumoje, M — įžambinės vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesė SM statmena trikampio plokštumai.

200. Apie daugiakampį apibrėžtas apskritimas. Įrodykite, kad tiesės, einančios per apskritimo centrą ir statmenos daugiakampio plokštumai, kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio viršūnių.

201. Kokį kampą sudaro prasilenkiančiosios tiesės AB ir PQ, kai taškai P ir Q yra vienodai nutolę nuo atkarpos AB galų?

202. Taškas nuo kiekvienos stačiojo trikampio viršūnės nutolęs per 10 cm. Į trikampio įžambinę išvesta pusiaukraštinė lygi 5 cm. Koks minėto taško atstumas nuo trikampio plokštumos?

203. Į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras O. Per jį išvesta tiesė OK, statmena trikampio plokštumai. Raskite atstumą nuo taško K iki trikampio kraštinių, kai $AB = BC = 10$ cm, $AC = 12$ cm, $OK = 4$ cm.

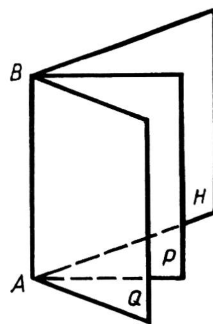
204. Taisyklingojo trikampio ABC plokštumai statmena tiesė OM eina per jo centrą O, $OM = a$, $\angle MCO = \varphi$. Raskite: a) atstumus nuo taško M iki kiekvienos trikampio ABC viršūnės ir iki tiesių AB, BC ir CA; b) apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulį; c) trikampio ABC plotą.

205. Per stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnę C išvesta tiesė CD, statmena to trikampio plokštumai. Apskaičiuokite trikampio ABD plotą, kai $CA = 3$ dm, $CB = 2$ dm, $CD = 1$ dm.

206. Trikampio kraštinės lygios 17 cm, 15 cm ir 8 cm. Per trikampio mažiausiojo kampo viršūnę A išvesta tiesė AM, statmena trikampio plokštumai. Raskite atstumą nuo taško M iki tiesės, kurioje yra trumpiausioji trikampio kraštinė; $AM = 20$ cm.

207. Trikampio ABC kraštinės tokios: $AB = BC = 13$ cm, $AC = 10$ cm. Taškas M nuo tiesių AB, BC ir AC nutolęs per $8\frac{2}{3}$ cm. Raskite atstumą nuo taško M iki plokštumos ABC, kai jo projekcija toje plokštumoje yra trikampio viduje.

208. Iš taško K, nuo plokštumos α nutolusio per 9 cm, į plokštumą α išvestos viena kitai statmenos pasvirosios, kurios su plokštuma α sudaro 45° ir 30° kampus. Raskite atkarpą LM.



66 pav.

209. Plokštuma α eina per tašką A. Lygios atkarpos AB ir AC su plokštuma α sudaro 40° ir 50° kampus. Palyginkite atstumus nuo taškų B ir C iki plokštumos α.

210. Dvisieniai kampai $HABP$ ir $PABQ$ (66 pav.) lygūs. Įrodykite, kad plokštumos ABP kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo plokštumų ABH ir ABQ.

211. Taisyklingojo trikampio KDM ir kvadrato $KMNP$ plokštumos viena kitai statmenos. Raskite DN, kai $KM = a$.

212. Taškas C yra taško D projekcija trikampio ABC plokštumoje. Įrodykite, kad trikampio ABD plotas lygus $\frac{S}{\cos\alpha}$; čia S — trikampio ABC plotas, o α — kampas tarp plokštumų ABC ir ABD.

213. Taisyklingojo trikampio DBC viršūnės D projekcija yra taisyklingojo trikampio ABC centras. Apskaičiuokite kampą tarp šių trikampių plokštumų.

214. Stačiakampio $ABCD$ projekcija plokštumoje α yra kvadratas ABC_1D_1. Apskaičiuokite kampą φ tarp plokštumos α ir stačiakampio $ABCD$ plokštumos, kai $AB : BC = 1 : 2$.

215. Lygiagrečios tiesės AB ir CD yra skirtingose dvisienio kampo sienose. Dvisienis kampas lygus 60°. Taškai A ir D nuo dvisienio kampo briaunos nutolę per 8 cm ir 6,5 cm. Raskite atstumą tarp tiesių AB ir CD.

216. Taškai A ir B yra dvisienio kampo briaunoje. Dvisienis kampas lygus 120°. Atkarpos AC ir BD yra skirtingose dvisienio kampo sienose ir statmenos dvisienio kampo briaunai. Raskite atkarpą CD, kai $AB = AC = BD = a$.

217. Stačiakampio gretasienio trijų sienų, turinčių bendrą viršūnę, plotų suma lygi 404 dm^2, o jo briaunos proporcingos skaičiams 3, 7 ir 8. Apskaičiuokite gretasienio įstrižainę.

III SKYRIUS

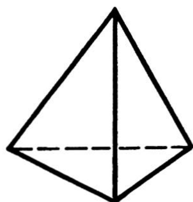
BRIAUNAINIAI

§ 1. BRIAUNAINIO SĄVOKA. PRIZMĖ

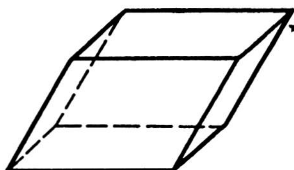
25. Briaunainio sąvoka. I skyriuje nagrinėjome tetraedrą ir gretasienį. Tetraedras — paviršius, sudarytas iš keturių trikampių (67 pav., *a*). Gretasienis — paviršius, sudarytas iš šešių lygiagretainių (67 pav., *b*). Kiekvienas tų paviršių riboja tam tikrą geometrinį kūną, atskiria jį nuo visos kitos erdvės dalies.

Paviršių, sudarytą iš daugiakampių ir ribojantį tam tikrą geometrinį kūną, vadinsime daugiasieniu paviršiumi, arba *briaunainiù*. Tetraedras ir gretasienis yra briaunainių pavyzdžiai. 68 paveiksle pavaizduotas dar vienas briaunainis — *oktaèdras*. Jį sudaro aštuoni trikampiai. Kūnas, kurį riboja briaunainis, dažnai irgi vadinamas briaunainiu.

Daugiakampiai, iš kurių sudarytas briaunainis, vadinami *briaunaĩnio síenomis**. Tetraedro ir oktaedro sienos yra trikampiai (žr. 67 pav., *a* ir 68 pav.). Gretasienio sienos yra lygiagretainiai (žr. 67 pav., *b*). Briaunainio sienų kraštinės vadinamos *briaunaĩnio briaunomìs*, o briaunų galai — *briaunaĩnio viršū́nėmis*. Atkarpa, jungianti dvi ne vienoje sienoje esančias viršūnes, vadinama *briaunaĩnio įstrižainè*.

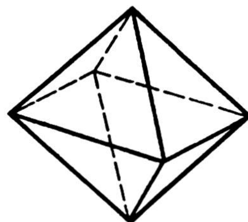


a) Tetraedras.



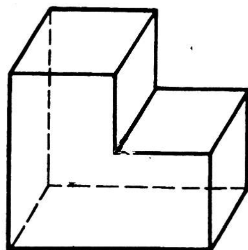
b) Gretasienis.

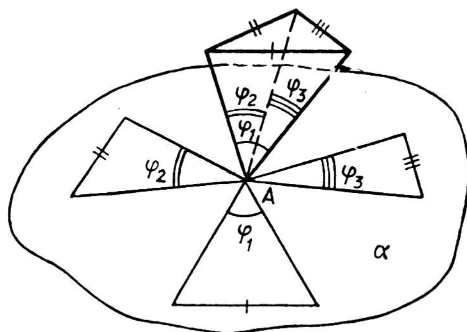
67 pav.



68 pav. Oktaedras.

* Laikoma, kad jokios dvi briaunainio gretimos sienos nėra vienoje plokštumoje.


69 pav. Neiškilasis briaunainis.



70 pav. $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360°$

Yra *iškilíeji* ir *neiškilíeji briaunainiai.* Briaunainis, kuris yra jo kiekvienos sienos plokštumos vienoje pusėje, vadinamas *iškilúoju briaunainiù.* Tetraedras, gretasienis ir oktaedras yra iškilieji briaunainiai. 69 paveiksle pavaizduotas neiškilasis briaunainis, sudarytas iš aštuonių daugiakampių.

Aišku, iškilojo briaunainio visos sienos yra iškilieji daugiakampiai. Galima įrodyti, kad *prie kiekvienos iškilojo briaunainio viršūnės esančių visų plokščiųjų kampų suma mažesnė už* 360°. Šį teiginį paaiškina 70 paveikslas. Briaunainis „supjaustytas" išilgai briaunų ir visos jo sienos, turinčios bendrą viršūnę A, išklotos vienoje plokštumoje α. Matyti, kad visų plokščiųjų kampų prie viršūnės A suma, t. y. $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, mažesnė už 360°.

26*. Geometrinis kūnas. Pabrėžėme, kad briaunainis riboja tam tikrą geometrinį kūną. Patikslinsime šią sąvoką.

Figūros taškas M laikomas tos figūros *krãšto taškù*, jeigu tarp jam kaip norima artimų taškų (įskaitant ir jį patį) yra ir figūrai priklausančių ir nepriklausančių taškų. Figūros visų krašto taškų aibė vadinama *figūros kraštù*. Pavyzdžiui, rutulio kraštas yra sfera.

Figūros taškas, kuris nėra jos krašto taškas, vadinamas figūros *vidaus tašku*. Visi figūros vidaus taškui kaip norima artimi erdvės taškai priklauso tai figūrai.

Figūra, išsitenkanti kurioje nors sferoje, vadinama *aprėžtąja*. Akivaizdu, kad rutulys, tetraedras, gretasienis yra aprėžtosios figūros, o tiesė ir plokštuma — neaprėžtosios figūros.

Jungiąja figūrà vadinama figūra, kurios kiekvienus du taškus galima sujungti visa esančia toje figūroje netrūkia linija. Jungiųjų figūrų pavyzdžiai yra tetraedras (žr. 67 pav., *a*), gretasienis (žr. 67 pav., *b*), oktaedras (žr. 68 pav.), plokštuma. Figūra, sudaryta iš dviejų lygiagrečių plokštumų, nėra jungioji figūra.

Geomètriniu kūnu (arba tiesiog *kūnu*) vadinama aprėžta jungioji erdvės figūra, kurią sudaro visi jos krašto taškai ir prie jų yra kiek norima

* Šio skyrelio galima nenagrinėti.

artimų kiekvieno to taško figūros vidaus taškų. Kūno kraštas dar vadinamas *kū́no pavir̃šiumi* ir sakoma, kad paviršius *riboja* kūną.

Plokštuma, kurios abiejose pusėse yra kūno taškų, vadinama *kertamą́ja plókštuma*. Figūra, kuri gaunama kūną perkirtus plokštuma (t. y. kūno ir kertamosios plokštumos bendroji dalis), vadinama *kū́no pjūvių̀*.

27. Prizmė. Nagrinėkime du lygius daugiakampius $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, esančius lygiagrečiose plokštumose α ir β ir išdėstytus taip, kad jų atitinkamas viršūnes jungiančios atkarpos $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ yra lygiagrečios (71 pav.). Kiekvienas iš n keturkampių

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ ...,\ A_nA_1B_1B_n \quad (1)$$

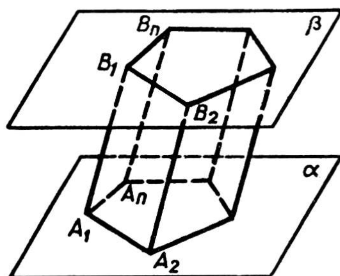
yra lygiagretainis, nes kiekvieno jų priešingosios kraštinės lygiagrečios. Pavyzdžiui, keturkampio $A_1A_2B_2B_1$ kraštinės A_1B_1 ir A_2B_2 lygiagrečios (duota sąlygoje), kraštinės A_1A_2 ir B_1B_2 lygiagrečios (remiamės lygiagrečių plokštumų, perkirstų trečia plokštuma, savybe (11 skyrelis)).

Briaunainis, kurį sudaro du lygūs daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, esantys lygiagrečiose plokštumose, bei n (1) sąrašo lygiagretainių, vadinamas *prizmè* (žr. 71 pav.).

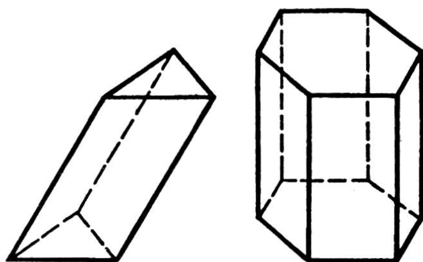
Daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ vadinami *prìzmės pagrindaĩs*, o (1) sąrašo lygiagretainiai — *prìzmės šóninėmis síenomis*. Atkarpos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n vadinamos *prìzmės šóninėmis briaunomìs*. Tos briaunos, kaip vienas prie kito pridėtų (1) lygiagretainių priešingos kraštinės, yra lygios ir lygiagrečios. Prizmė, kurios pagrindai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, žymima šitaip: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Ji vadinama *n-kampè prizmè*. 72 paveiksle pavaizduotos trikampė ir šešiakampė prizmės, o 67 paveiksle, *b*, — keturkampė prizmė, t. y. gretasienis.

Statmuo, nuleistas iš vieno prizmės pagrindo kurio nors taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas *prìzmės aukštìnė*.

Prizmė, kurios šoninės briaunos statmenos pagrindams, vadinama *stačią́ja*, priešingu atveju — *pasvirą́ja*. Stačiosios prizmės aukštinė lygi jos šoninei briaunai.



71 pav. Prizmė. Daugiakampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ — prizmės pagrindai. Lygiagretainiai $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — prizmės šoninės sienos.



72 pav.

Stačioji prizmė, kurios pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, vadinama *taisyklìngąja prizmè*. Tokios prizmės visos šoninės sienos yra lygūs stačiakampiai (paaiškinkite kodėl). 72 paveiksle pavaizduota taisyklingoji šešiakampė prizmė.

Prìzmės pavir̃šiaus plótu vadinama visų jos sienų plotų suma, o *prìzmės šóninio pavir̃šiaus plótu* — jos šoninių sienų plotų suma. Prizmės paviršiaus plotas $S_{pr.}$; jos šoninio paviršiaus plotas $S_{šon.}$ ir pagrindo plotas $S_{pagr.}$. Formulę užrašome taip:

$$S_{pr.} = S_{šon.} + 2S_{pagr.}.$$

Įrodysime stačiosios prizmės šoninio paviršiaus ploto teoremą.

T e o r e m a. ***Stačiosios prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus prizmės pagrindo perimetro ir aukštinės sandaugai.***

Į r o d y m a s. Stačiosios prizmės šoninės sienos yra stačiakampiai, kurių pagrindai — prizmės pagrindo kraštinės, o aukštinės lygios prizmės aukštinei h. Prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus nurodytų stačiakampių plotų sumai, t. y. pagrindo kraštinių ir aukštinės h sandaugų sumai. Dauginamąjį h iškėlę už skliaustų, skliaustuose gausime prizmės pagrindo kraštinių sumą, t. y. prizmės pagrindo perimetrą P. Taigi $S_{šon.} = Ph$. Teorema įrodyta.

Uždaviniai

218. Įrodykite, kad: a) stačiosios prizmės visos šoninės sienos yra stačiakampiai; b) taisyklingosios prizmės visos šoninės sienos yra lygūs stačiakampiai.

219. Stačiakampio gretasienio pagrindų kraštinės lygios 12 cm ir 5 cm. Gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro $45°$ kampą. Apskaičiuokite gretasienio šoninę briauną.

220. Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio įstrižainės 10 cm ir 24 cm. Gretasienio aukštinė lygi 10 cm. Raskite ilgesniąją gretasienio įstrižainę.

221. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinė lygi 8 cm, šoninė briauna — 6 cm. Apskaičiuokite pjūvio, einančio per viršutinio pagrindo kraštinę ir priešingą apatinio pagrindo viršūnę, plotą.

222. Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 25 cm ir 9 cm, aukštinė 8 cm. Raskite dvisienius kampus prie prizmės šoninių briaunų.

223. Per dvi priešingas kubo briaunas išvestas pjūvis, kurio plotas lygus $64\sqrt{2}$ cm^2. Raskite kubo briauną ir jo įstrižainę.

224. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė į pagrindo plokštumą pasvirusi 60° kampu. Pagrindo įstrižainė lygi $4\sqrt{2}$ cm. Apskaičiuokite pjūvio, einančio per apatinio pagrindo kraštinę ir priešingą viršutinio pagrindo kraštinę, plotą.

225. Taisyklingosios keturkampės prizmės įstrižainė su šoninės sienos plokštuma sudaro 30° kampą. Raskite kampą tarp įstrižainės ir pagrindo plokštumos.

226. Per taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo įstrižainę išvestas su prizmės įstrižaine lygiagretus pjūvis. Apskaičiuokite pjūvio plotą, kai prizmės pagrindo kraštinė lygi 2 cm, o aukštinė lygi 4 cm.

227. Prizmės pagrindas — taisyklingasis trikampis ABC. Šoninė briauna AA_1 su pagrindo kraštinėmis AC ir AB sudaro lygius kampus. Įrodykite, kad: a) $BC \perp AA_1$; b) CC_1B_1B — stačiakampis.

228. Pasvirosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra lygiašonis trikampis ABC, kurio $AC = AB = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Prizmės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Viršūnės A_1 projekcija yra trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Apskaičiuokite sienos CC_1B_1B plotą.

229. Taisyklingosios n-kampės prizmės pagrindo kraštinė lygi a, aukštinė lygi h. Apskaičiuokite prizmės šoninio paviršiaus ir prizmės paviršiaus plotą, kai: a) $n = 3$, $a = 10$ cm, $h = 15$ cm; b) $n = 4$, $a = 12$ dm, $h = 8$ dm; c) $n = 6$, $a = 23$ cm, $h = 5$ dm; d) $n = 5$, $a = 0{,}4$ m, $h = 10$ cm.

230. Stačiosios prizmės pagrindas — trikampis, kurio kraštinės 5 cm ir 3 cm, o kampas tarp jų lygus 120°. Didžiausios šoninės sienos plotas 35 cm^2. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

231. Stačiojo gretasienio pagrindo kraštinės lygios 8 cm ir 15 cm, kampas tarp jų 60°. Mažesniojo įstrižinio pjūvio* plotas lygus 130 cm^2. Raskite gretasienio paviršiaus plotą.

232. Stačiakampio gretasienio įstrižainė lygi d, su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ, o su mažesniąja šonine siena — kampą α. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą.

233. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, kurio kampas B — status. Per briauną BB_1 išvestas pjūvis BB_1D_1D, statmenas sienos AA_1C_1C plokštumai. Apskaičiuokite pjūvio plotą, kai $AA_1 = 10$ cm, $AD = 27$ cm, $DC = 12$ cm.

---

* Pjūvis, einantis per kurią nors gretasienio įstrižainę ir šoninę briauną, vadinamas *gretasienio įstrižiniu pjūviu.*

234. Stačiosios prizmės pagrindas yra statusis trikampis. Per įžambinės vidurio tašką išvesta įžambinei statmena plokštuma. Raskite gauto pjūvio plotą, kai statiniai lygūs 20 cm ir 21 cm, o šoninė briauna 42 cm.

235. Stačiosios prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio smailusis kampas φ. Per statinį, esantį prieš tą kampą, ir tam statiniui priešingą pagrindo viršūnę išvestas pjūvis. Jis su pagrindo plokštuma sudaro kampą θ. Raskite prizmės šoninio paviršiaus ploto ir pjūvio ploto santykį.

236. Įrodykite, kad pasvirosios prizmės šoninio paviršiaus plotas lygus jos statmenojo pjūvio* perimetro ir šoninės briaunos sandaugai.

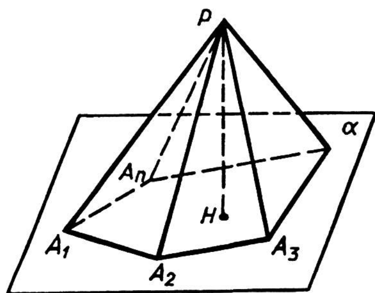
237. Pasvirosios keturkampės prizmės šoninė briauna lygi 12 cm, o statmenasis pjūvis yra rombas, kurio kraštinė 5 cm. Apskaičiuokite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

238. Pasvirosios trikampės prizmės dvi šoninės sienos yra viena kitai statmenos, o jų bendra briauna, nuo kitų šoninių briaunų nutolusi per 12 cm ir 35 cm, lygi 24 cm. Apskaičiuokite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

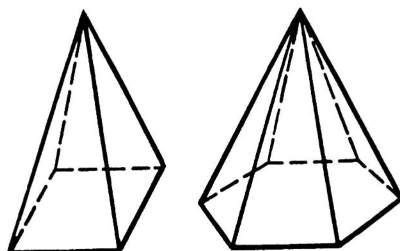
§ 2. PIRAMIDĖ

28. Piramidė. Nagrinėkime daugiakampį $A_1A_2...A_n$ ir tašką P, nesantį to daugiakampio plokštumoje. Tašką P atkarpomis sujungę su daugiakampio viršūnėmis, gausime n trikampių (73 pav.):

$$PA_1A_2,\ PA_2A_3,\ ...,\ PA_nA_1. \qquad (1)$$



73 pav. Piramidė. Daugiakampis $A_1A_2A_3...A_n$ — piramidės pagrindas. Trikampiai A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1 — piramidės šoninės sienos. P — piramidės viršūnė.



74 pav.

---

* *Pasvirosios prizmės statmenuoju pjūviu* vadinamas jos pjūvis, gautas perkirtus prizmę šoninėms briaunoms statmena šonines briaunas kertančia plokštuma.

Piramidė vadinamas briaunainis, sudarytas iš n-kampio $A_1A_2...A_n$ ir n (1) sąrašo trikampių. Daugiakampis $A_1A_2...A_n$ vadinamas *piramìdės pãgrindu*, o (1) sąrašo trikampiai — *piramìdės šóninėmis síenomis*. Taškas P vadinamas *piramìdės viršū́ne*, o atkarpos PA_1, PA_2, ..., PA_n — *piramìdės šóninėmis briaunomìs*. Piramidė, kurios pagrindas $A_1A_2...A_n$ ir viršūnė P, žymima $PA_1A_2...A_n$ ir vadinama *n-kampe piramide*. 74 paveiksle pavaizduota keturkampė ir šešiakampė piramidė. Aišku, trikampė piramidė yra tetraedras.

Statmuo, nuleistas iš piramidės viršūnės į pagrindo plokštumą, vadinamas *piramìdės aukštìnė*. 73 paveiksle atkarpa PH — piramidės aukštinė.

Piramìdės pavir̃šiaus plótu vadinama visų jos sienų (t. y. pagrindo ir šoninių sienų) plotų suma, o *piramìdės šóninio pavir̃šiaus plótu* — jos šoninių sienų plotų suma.

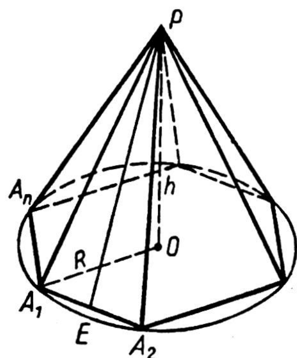
Taigi

$$S_{\text{pir.}} = S_{\text{šon.}} + S_{\text{pagr.}}\,. \qquad (2)$$

29. Taisyklingoji piramidė. Piramidė, kurios pagrindas — taisyklingasis daugiakampis, o atkarpa, jungianti piramidės viršūnę su pagrindo centru*, yra piramidės aukštinė, vadinama *taisyklìngąja piramidė* (75 pav.).

Įrodysime, kad *taisyklingosios piramidės visos šoninės briaunos lygios, o šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.*

Nagrinėkime taisyklingąją piramidę $PA_1A_2..A_n$ (žr. 75 pav.). Pirmiausia įrodysime, kad šios piramidės visos šoninės briaunos lygios. Kiekviena šoninė briauna yra stačiojo trikampio, kurio vienas statinis — piramidės aukštinė PO, o kitas — apie pagrindą apibrėžto apskritimo spindulys, įžambinė (pavyzdžiui, šoninė briauna PA_1 yra stačiojo trikampio OPA_1, kurio $OP = h$, $OA_1 = R$, įžambinė). Pagal Pitagoro teoremą kiekviena šoninė briauna lygi $\sqrt{h^2+R^2}$, todėl $PA_1 = PA_2 = ...$ $... = PA_n$.



75 pav.

Įrodėme, kad taisyklingosios piramidės $PA_1A_2...A_n$ visos šoninės briaunos lygios, todėl šoninės sienos yra lygiašoniai trikampiai. Tų trikampių pagrindai irgi lygūs, nes $A_1A_2...A_n$ — taisyklingasis daugiakampis. Lygios ir jų šoninės sienos (trečiasis trikampių lygumo požymis). Tai ir reikėjo įrodyti.

* Primename, kad taisyklingojo daugiakampio centru vadinamas į jį įbrėžto (apie jį apibrėžto) apskritimo centras.

Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė, nuleista iš jos viršūnės, vadinama *apotemà*. 75 paveiksle atkarpa PE — viena apotemų. Aišku, kad taisyklingosios piramidės visos apotemos lygios.

Įrodysime taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus ploto teoremą.

T e o r e m a. ***Taisyklingosios piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pusei pagrindo perimetro ir apotemos sandaugos.***

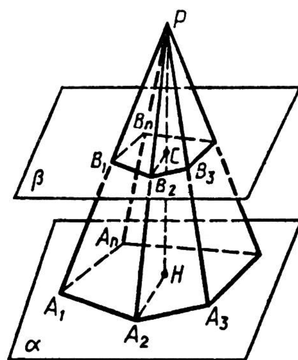
Į r o d y m a s. Taisyklingosios piramidės šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai, kurių pagrindai — piramidės pagrindo kraštinės, o aukštinės lygios apotemai. Piramidės šoninio paviršiaus plotas S lygus pagrindo kraštinių ir pusės apotemos d sandaugų sumai. Dauginamąjį $\frac{1}{2}d$ iškėlę prieš skliaustus, skliaustuose gausime piramidės pagrindo kraštinių sumą, t. y. jo perimetrą. Teorema įrodyta.

30. Nupjautinė piramidė. Pasirinkime bet kurią piramidę $PA_1A_2...A_n$. Išveskime su piramidės pagrindo plokštuma α lygiagrečią plokštumą β, kertančią piramidės šonines briaunas taškuose $B_1, B_2, ..., B_n$ (76 pav.). Plokštuma β piramidę dalija į du briaunainius. Briaunainis, kurio sienos yra n-kampiai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$ (*apatinis ir viršutinis pagrindai*), esantys lygiagrečiose plokštumose, ir n keturkampių $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (*šoninės sienos*), vadinamas *nupjautinė piramidė*. Atkarpos A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n vadinamos nupjautinės piramidės *šóninėmis briaunomis*.

Nupjautinę piramidę, kurios pagrindai $A_1A_2...A_n$ ir $B_1B_2...B_n$, žymėsime šitaip: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.

Statmuo, nuleistas iš vieno pagrindo kurio nors taško į kito pagrindo plokštumą, vadinamas *nupjautìnės piramìdės aukštinė*. 76 paveiksle atkarpa CH — nupjautinės piramidės aukštinė.

Įrodysime, kad *nupjautinės piramidės šoninės sienos yra trapecijos*. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, šoninę sieną $A_1A_2B_2B_1$ (žr. 76 pav.). Kraštinės A_1A_2 ir B_1B_2 lygiagrečios, nes yra lygiagrečiose tiesėse, kuriomis plokštuma PA_1A_2 kerta lygiagrečias plokštumas α ir β. Kitos dvi tos sienos kraštinės A_1B_1 ir A_2B_2 nelygiagrečios; jų tęsiniai susikerta taške P. Vadinasi, išnagrinėtoji siena yra trapecija. Šitaip galima įrodyti, kad ir kitos šoninės sienos yra trapecijos.



76 pav. Nupjautinė piramidė.

Nupjautinė piramidė, kuri gaunama taisyklingąją piramidę perkirtus su pagrindu lygiagrečia plokštuma, vadinama *taisyklìngąja nu-*

pjautinė piramidė. Taisyklingosios nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji daugiakampiai, o šoninės sienos — lygiašonės trapecijos (įrodykite). Tų trapecijų aukštinės vadinamos *apotemomis.*

Nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotu vadinama jos šoninių sienų plotų suma.

Savarankiškai įrodykite šią teoremą.

T e o r e m a. ***Taisyklingosios nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pusei pagrindų perimetrų sumos ir apotemos sandaugos.***

Uždaviniai

239. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė lygi 5 cm, o viena įstrižainė 8 cm. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 7 cm. Raskite piramidės šonines briaunas.

240. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės 20 cm ir 36 cm, o plotas lygus 360 cm^2. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 12 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

241. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės 5 m ir 4 m, o trumpesnioji įstrižainė 3 m. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 2 m. Raskite piramidės paviršiaus plotą.

242. Piramidės pagrindas yra kvadratas, viena jos šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai. Šoninės sienos plokštuma, neinanti per piramidės aukštinę, į pagrindo plokštumą pasvirusi 45° kampu. Ilgiausioji šoninė briauna lygi 12 cm. Raskite: a) piramidės aukštinę; b) piramidės šoninio paviršiaus plotą.

243. Piramidės *DABC* pagrindas yra trikampis *ABC*, kurio $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm. Briauna *AD* statmena pagrindo plokštumai ir lygi 9 cm. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

244. Piramidės *DABC* pagrindas yra statusis trikampis *ABC*, kurio įžambinė *AB* lygi 29 cm, statinis *AC* lygus 21 cm. Briauna *DA* statmena pagrindo plokštumai ir lygi 20 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

245. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio įstrižainė lygi 8 cm. Dviejų šoninių sienų plokštumos statmenos pagrindo plokštumai, o kitos dvi šoninės sienos su pagrindu sudaro 30° ir 45° kampus. Apskaičiuokite piramidės paviršiaus plotą.

246. Trikampės piramidės aukštinė lygi 40 cm, o kiekvienos šoninės sienos aukštinė, nuleista iš piramidės viršūnės, lygi 41 cm. a) Įrodykite, kad piramidės aukštinė eina per apskritimo, įbrėžto į piramidės pagrindą, centrą. b) Apskaičiuokite piramidės pagrindo plotą, kai jo perimetras lygus 42 cm.

247. Dvisieniai kampai prie piramidės pagrindo lygūs. Įrodykite, kad: a) piramidės aukštinė eina per apskritimo, įbrėžto į jos pagrindą, centrą; b) visų šoninių sienų aukštinės, nuleistos iš piramidės viršūnės, lygios; c) piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindo perimetro ir šoninės sienos aukštinės, nuleistos iš piramidės viršūnės, sandaugos pusei.

248. Piramidės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės 12 cm, 10 cm ir 10 cm. Kiekviena šoninė siena į pagrindą pasvirusi 45° kampu. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

249. Piramidės visos šoninės briaunos lygios. Įrodykite, kad: a) piramidės aukštinė eina per apskritimo, apibrėžto apie pagrindą, centrą; b) piramidės visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro lygius kampus.

250. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kampas 120°. Šoninės briaunos, lygios 16 cm, su piramidės aukštine sudaro 45° kampus. Raskite piramidės pagrindo plotą.

251. Piramidės $DABC$ pagrindas yra statusis trikampis, kurio įžambinė BC. Piramidės šoninės briaunos viena kitai lygios, piramidės aukštinė 12 cm. Raskite piramidės šoninę briauną, kai BC = 10 cm.

252. Piramidės $DABC$ pagrindas yra lygiašonis trikampis ABC, kurio $AB = AC$, BC = 6 cm, aukštinė AH lygi 9 cm. Be to, $DA = DB = DC$ = 13 cm. Raskite piramidės aukštinę.

253. Piramidės pagrindas yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 6 cm ir $4\sqrt{6}$ cm, aukštinė 5 cm. Piramidės kiekviena šoninė briauna lygi 13 cm. Raskite piramidės aukštinę.

254. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, aukštinė lygi H. Raskite: a) piramidės šoninę briauną; b) plokščiąjį kampą prie piramidės viršūnės; c) kampą tarp piramidės šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos; d) kampą tarp piramidės šoninės sienos ir pagrindo; e) dvisienį kampą prie piramidės šoninės briaunos.

255. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 8 cm, o plokščiasis kampas prie viršūnės lygus φ. Raskite piramidės aukštinę.

256. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi m, o plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite: a) piramidės aukštinę; b) šoninę briauną; c) kampą tarp šoninės sienos ir pagrindo plokštumos; d) dvisienį kampą prie piramidės šoninės briaunos.

257. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi h, o dvisienis kampas prie pagrindo kraštinės lygus 45°. Raskite piramidės paviršiaus plotą.

258. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Piramidės šoninė briauna lygi 12 cm. Apskaičiuokite piramidės paviršiaus plotą.

259. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi 6 cm, šoninė siena į pagrindo plokštumą pasvirusi 60° kampu. Raskite piramidės šoninę briauną.

260. Per taisyklingosios trikampės piramidės $DABC$ šoninę briauną DC ir aukštinę DO išvesta plokštuma α. Įrodykite, kad: a) briauna AB statmena plokštumai α; b) statmuo, nuleistas iš viršūnės C į sienos ADB apotemą, yra statmuo plokštumai ADB.

261. Įrodykite, kad taisyklingosios trikampės piramidės prasilenkiančios briaunos viena kitai statmenos.

262. Įrodykite, kad plokštuma, einanti per taisyklingosios piramidės aukštinę ir šoninės sienos aukštinę, yra statmena šoninės sienos plokštumai.

263. Taškai K, L ir N yra taisyklingosios piramidės $MABCD$ briaunose BC, MC ir AD, $KN \parallel BA$, $KL \parallel BM$. a) Nubraižykite piramidės pjūvį, gautą ją perkirtus plokštuma KLN, ir nustatykite to pjūvio rūšį. b) Įrodykite, kad plokštuma KLN lygiagreti su plokštuma AMB.

264. Raskite taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninio paviršiaus plotą, kai jos pagrindo kraštinė lygi a, o šoninės sienos plotas lygus pjūvio, išvesto per piramidės viršūnę ir ilgiausiąją pagrindo įstrižainę, plotui.

265. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna į pagrindo plokštumą pasvirusi 60° kampu. Per pagrindo kraštinę išvesta plokštuma, su pagrindo plokštuma sudaranti 30° kampą. Piramidės pagrindo kraštinė lygi 12 cm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

266. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 6 dm ir 8 dm. Piramidės aukštinė 2 dm, o visos šoninės briaunos lygios. Apskaičiuokite piramidės pjūvio, einančio per pagrindo įstrižainę ir lygiagretaus su šonine briauna, plotą.

267. Piramidė perkirsta su pagrindu lygiagrečia plokštuma. Įrodykite, kad ta plokštuma piramidės šonines briaunas ir aukštinę dalija į proporcingas dalis.

268. Taisyklingosios keturkampės piramidės su pagrindo plokštuma lygiagreti plokštuma piramidės aukštinę dalija santykiu 1 : 2 pradedant nuo piramidės viršūnės. Gautos nupjautinės piramidės apotema lygi 4 dm, o jos paviršiaus plotas 186 dm^2. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės aukštinę.

269. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės 4 dm ir 2 dm, o šoninė briauna 2 dm. Raskite piramidės aukštinę ir apotemą.

270. Nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji trikampiai, kurių kraštinės 5 cm ir 3 cm. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir lygi 1 cm. Raskite nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotą.

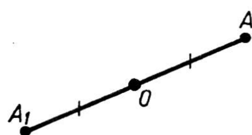
§ 3. TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

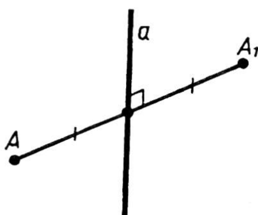
31. Simetrija erdvėje. Planimetrijoje nagrinėjome figūras, simetriškas taško ir tiesės atžvilgiu. Stereometrijoje nagrinėjama simetrija taško, tiesės ir plokštumos atžvilgiu.

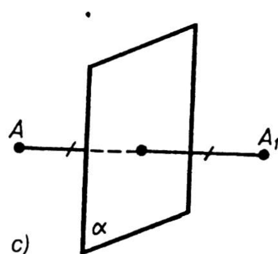
Taškai A ir A_1 yra *simètriški tãško O (simètrijos ceñtro) ãtžvilgiu*, kai O — atkarpos AA_1 vidurio taškas (77 pav., *a*). Laikoma, kad taškas O simetriškas jam pačiam.

Taškai A ir A_1 yra *simètriški tiesẽs a (simètrijos ašiẽs) ãtžvilgiu*, kai tiesė a eina per atkarpos AA_1 vidurio tašką ir statmena tai atkarpai (77 pav., *b*). Laikoma, kad kiekvienas tiesės a taškas simetriškas jam pačiam.

Taškai A ir A_1 yra *simètriški plokštumõs α (simètrijos plokštumõs) ãtžvilgiu*, kai plokštuma α eina per atkarpos AA_1 vidurio tašką ir statmena tai atkarpai (77 pav., *c*). Laikoma, kad kiekvienas plokštumos α taškas simetriškas jam pačiam.



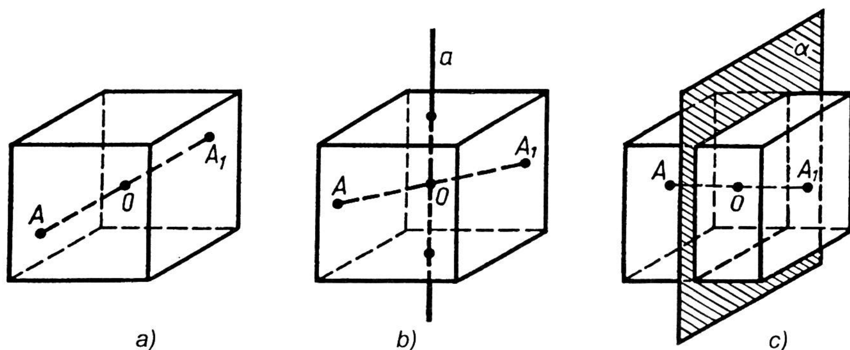




77 pav. *a)* *b)* *c)*

Pateiksime figūros simetrijos centro, simetrijos ašies ir simetrijos plokštumos sąvokas.

Figūros simetrijos centru (ašimi, plokštuma) vadinamas (vadinama) taškas (tiesė, plokštuma), kurio (kurios) atžvilgiu yra simetriški tą figūrą sudarantys taškai.



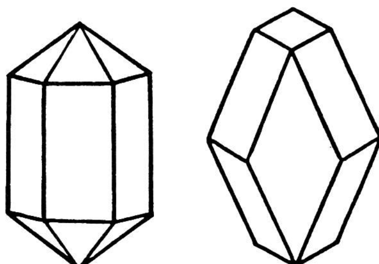
78 pav.

78 paveiksle, *a, b, c*, pavaizduoti stačiakampio gretasienio simetrijos centras *O*, simetrijos ašis *a* ir simetrijos plokštuma α. Figūra gali turėti vieną arba kelis simetrijos centrus (simetrijos ašis ar simetrijos plokštumas). Pavyzdžiui, kubas turi tik vieną simetrijos centrą ir keletą simetrijos ašių bei simetrijos plokštumų. Yra figūrų, turinčių be galo daug simetrijos centrų, simetrijos ašių ar simetrijos plokštumų. Paprasčiausios tokios figūros yra tiesė ir plokštuma. Kiekvienas plokštumos taškas yra jos simetrijos centras. Kiekviena plokštumai statmena tiesė (plokštuma) yra tos plokštumos simetrijos ašis (simetrijos plokštuma). Antra vertus, yra figūrų, neturinčių simetrijos centrų, simetrijos ašių ar simetrijos plokštumų. Pavyzdžiui, tetraedras neturi nė vieno simetrijos centro.

Su simetrija dažnai susiduriame gamtoje, architektūroje, technikoje, buityje. Pavyzdžiui, yra daug simetriškų plokštumos atžvilgiu pastatų (79 pav.). Nemaža detalių turi simetrijos ašis. Beveik visi gamtoje randami kristalai turi simetrijos centrą, simetrijos ašį ar simetrijos plokštumą (80 pav.). Briaunainio simetrijos centras, simetrijos ašis ir simetrijos plokštuma geometrijoje vadinami to *briaunainio simetrijos elementais*.



79 pav.



80 pav.

32. Taisyklingojo briaunainio sąvoka. *Taisyklìnguoju briaunainiù* vadinamas iškilasis briaunainis, kurio visos sienos yra lygūs taisyklingieji daugiakampiai ir į kiekvieną jo viršūnę sueina tiek pat briaunų. Pavyzdžiui, kubas yra taisyklingasis briaunainis. Visos jo sienos — lygūs kvadratai, į kiekvieną viršūnę sueina trys briaunos.

Akivaizdu, kad visos taisyklingojo briaunainio briaunos lygios. Galima įrodyti, kad visi dvisieniai kampai, kurių sienose yra dvi bendrą briauną turinčios taisyklingojo briaunainio sienos, lygūs.

Įrodysime, kad *nėra taisyklingojo briaunainio, kurio sienos yra taisyklingieji šešiakampiai, septyniakampiai, apskritai n-kampiai, kai* $n \geq 6$. Taisyklingojo n-kampio kampas, kai $n \geq 6$, ne mažesnis už 120° (paaiškinkite kodėl). Antra vertus, prie kiekvienos briaunainio viršūnės turi būti ne mažiau kaip trys plokštieji kampai. Jei būtų taisyklingasis briaunainis, kurio sienos — taisyklingieji n-kampiai ir $n \geq 6$, tai jo plokštieji kampai prie vienos viršūnės sudarytų ne mažiau kaip $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$. Tačiau taip būti negali, nes iškilojo briaunainio visų plokščiųjų kampų prie kiekvienos viršūnės suma yra mažesnė už 360° (25 skyrelis).

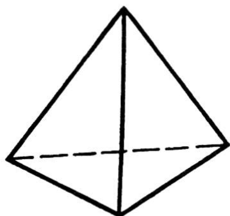
Dėl tos pačios priežasties kiekviena taisyklingojo briaunainio viršūnė gali būti arba trijų, keturių, penkių lygiakraščių trikampių, arba trijų kvadratų, arba trijų taisyklingųjų penkiakampių viršūnė. Kitų galimybių nėra.

Taigi yra šitokie taisyklingieji briaunainiai.

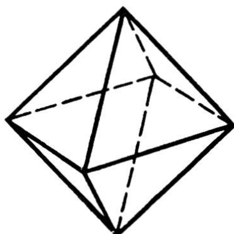
*Taisyklingasis tetraedras** (81 pav.) sudarytas iš keturių lygiakraščių trikampių. Kiekviena jo viršūnė yra trijų trikampių viršūnė. Vadinasi, prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 180°.

Taisyklingasis oktaedras (82 pav.) sudarytas iš aštuonių lygiakraščių trikampių. Kiekviena oktaedro viršūnė yra keturių trikampių viršūnė. Vadinasi, prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 240°.

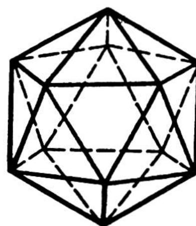
Taisyklingasis ikosaedras (83 pav.) sudarytas iš dvidešimt lygiakraščių trikampių. Kiekviena ikosaedro viršūnė yra penkių trikampių viršūnė. Vadinasi, prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 300°.



81 pav.

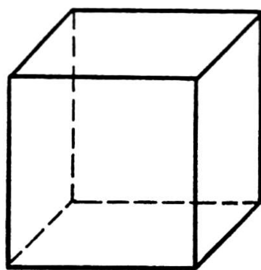


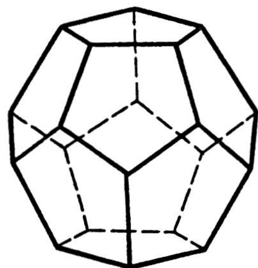
82 pav.

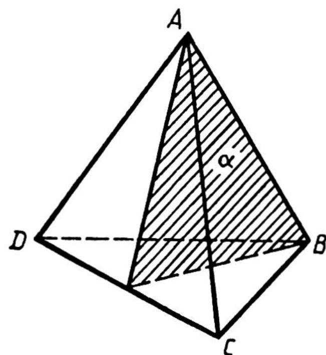


83 pav.

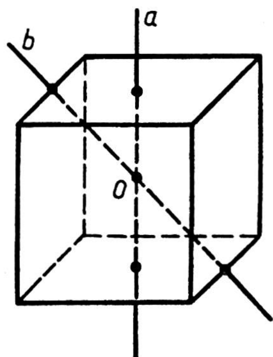
* Čia skiriame taisyklingąjį tetraedrą nuo taisyklingosios trikampės piramidės. Taisyklingojo tetraedro visos briaunos yra lygios, o taisyklingosios piramidės visos šoninės briaunos lygios, bet jos gali būti nelygios piramidės pagrindo briaunoms.


84 pav.


85 pav.



86 pav.



87 pav.

Kubas (84 pav.) sudarytas iš šešių kvadratų. Kiekviena kubo viršūnė yra trijų kvadratų viršūnė. Vadinasi, prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 270°.

Taisyklingasis dodekaedras (85 pav.) sudarytas iš dvylikos taisyklingųjų penkiakampių. Kiekviena dodekaedro viršūnė yra trijų taisyklingųjų penkiakampių viršūnė. Vadinasi, prie kiekvienos viršūnės esančių plokščiųjų kampų suma lygi 324°.

Be čia išvardytų penkių taisyklingųjų briaunainių rūšių, kitų taisyklingųjų briaunainių negali būti.

33. Taisyklingųjų briaunainių simetrijos elementai. Išnagrinėsime taisyklingųjų briaunainių simetrijos elementus.

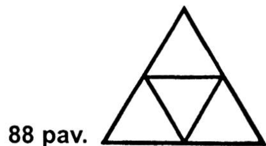
T a i s y k l i n g a s i s t e t r a e d r a s neturi simetrijos centro. Tiesė, einanti per dviejų priešingųjų briaunų vidurio taškus, yra jo simetrijos ašis. Plokštuma α, einanti per briauną AB ir statmena taisyklingojo tetraedro $ABCD$ priešingajai briaunai CD, yra simetrijos plokštuma (86 pav.). Taisyklingasis tetraedras turi tris simetrijos ašis ir šešias simetrijos plokštumas.

K u b a s turi vieną simetrijos centrą — jo įstrižainių susikirtimo tašką. Tiesės a ir b, einančios atitinkamai per priešingųjų sienų centrus ir per dviejų priešingųjų briaunų, nesančių vienoje sienoje, vidurio taškus, yra kubo simetrijos ašys (87 pav.). Kubas turi devynias simetrijos ašis. Visos jos eina per simetrijos centrą. Plokštuma, einanti per bet kurias dvi simetrijos ašis, yra kubo simetrijos plokštuma. Kubas turi devynias simetrijos plokštumas.

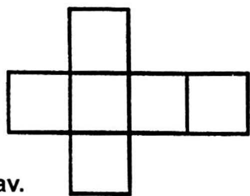
T a i s y k l i n g a s i s o k t a e d r a s (žr. 82 pav.), t a i s y k l i n g a s i s i k o s a e d r a s (žr. 83 pav.) ir t a i s y k l i n g a s i s d o d e k a e d r a s (žr. 85 pav.) turi simetrijos centrą ir keletą simetrijos ašių bei simetrijos plokštumų. Pabandykite suskaičiuoti, kiek jų yra.

Praktikos darbai

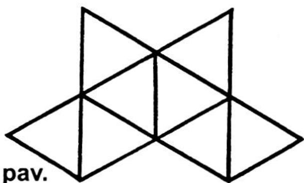
271. 88 paveiksle pavaizduota taisyklingojo tetraedro išklotinė. Perbraižykite ją (padidinę) ant standaus popieriaus lapo, iškirpkite ir suklijuokite iš jos taisyklingąjį tetraedrą*.


88 pav.

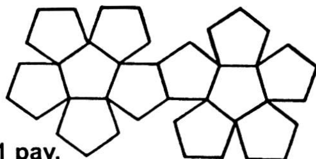
272. 89 paveiksle pavaizduota kubo išklotinė. Perbraižykite ją (padidinę) ant standaus popieriaus lapo, iškirpkite ir suklijuokite iš jos kubą.


89 pav.

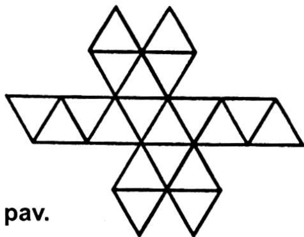
273. 90 paveiksle pavaizduota taisyklingojo oktaedro išklotinė. Perbraižykite ją (padidinę) ant standaus popieriaus lapo, iškirpkite išklotinę ir suklijuokite iš jos taisyklingąjį oktaedrą.


90 pav.

274. 91 paveiksle pavaizduota taisyklingojo dodekaedro išklotinė. Perbraižykite ją (padidinę) ant standaus popieriaus lapo, iškirpkite ir suklijuokite iš jos taisyklingąjį dodekaedrą.


91 pav.

275. 92 paveiksle pavaizduota taisyklingojo ikosaedro išklotinė. Perbraižykite ją (padidinę) ant standaus popieriaus lapo, iškirpkite ir suklijuokite iš jos taisyklingąjį ikosaedrą.


92 pav.

Klausimai ir uždaviniai

276. Kiek simetrijos centrų turi: a) gretasienis; b) taisyklingoji trikampė prizmė; c) dvisienis kampas; d) atkarpa?

277. Kiek simetrijos ašių turi: a) atkarpa; b) taisyklingasis trikampis; c) kubas?

278. Kiek simetrijos plokštumų turi: a) taisyklingoji keturkampė prizmė, kuri nėra kubas; b) taisyklingoji keturkampė piramidė; c) taisyklingoji trikampė piramidė?

279. Raskite kampą tarp kubo sienų įstrižainių, turinčių bendrą galą.

280. Kubo briauna lygi a. Raskite pjūvio, einančio per dviejų sienų įstrižaines, plotą.

---

* Pjaudami išklotinę, palikite kraštus, kad būtų galima suklijuoti.

281. Iš kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnės D_1 išvestos sienų įstrižainės D_1A, D_1C ir D_1B_1, jų galai sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad briaunainis D_1AB_1C — taisyklingasis tetraedras. Raskite kubo ir tetraedro paviršių plotų santykį.

282. Raskite kampą tarp taisyklingojo oktaedro dviejų briaunų, kurios turi bendrą viršūnę, bet nėra vienoje sienoje (žr. 82 pav.).

283. Taisyklingojo tetraedro $DABC$ briauna lygi a. Raskite: a) tetraedro pjūvio, gauto jį perkirtus plokštuma, einančia per sienos ABC centrą ir lygiagrečia su siena BDC, plotą; b) tetraedro pjūvio, gauto jį perkirtus plokštuma, einančia per sienos ABC centrą ir statmena briaunai AD, plotą.

284*. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi 2. Nuo kiekvienos jo viršūnės nukirstas taisyklingasis tetraedras, kurio briauna lygi 1. Kokią figūrą gavome?

285. Įrodykite, kad taisyklingojo tetraedro atkarpos, jungiančios sienų centrus, yra lygios.

286. Taisyklingojo tetraedro aukštinė h, briauna m, atstumas tarp jo sienų centrų n. Išreikškite: a) briauną m aukštine h; b) atstumą tarp sienų centrų n briauna m.

287. Taisyklingojo oktaedro briauna lygi a. Raskite atstumą tarp: a) jo dviejų priešingųjų viršūnių; b) dviejų gretimųjų sienų centrų; c) priešingųjų sienų.

III SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Kiek mažiausiai briaunų gali turėti briaunainis?
2. Prizmė turi n sienų. Koks daugiakampis yra jos pagrindas?
3. Prizmės dvi gretimosios šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai. Ar ta prizmė stačioji?
4. Kokios prizmės šoninės briaunos lygiagrečios su jos aukštine?
5. Prizmės visos briaunos lygios. Ar ta prizmė taisyklingoji?
6. Ar pasvirosios prizmės vienos šoninės sienos aukštinė gali būti prizmės aukštinė?
7. Ar yra prizmė, kurios: a) šoninė briauna statmena tik vienai pagrindo briaunai; b) tik viena šoninė siena statmena pagrindui?
8. Taisyklingoji trikampė prizmė padalyta į dvi prizmes plokštuma, einančia per pagrindų vidurines linijas. Koks tų prizmių šoninių paviršių plotų santykis?

9. Piramidės šoninės sienos yra taisyklingieji trikampiai. Ar ta piramidė taisyklingoji?
10. Kiek sienų, statmenų pagrindo plokštumai, gali turėti piramidė?
11. Ar yra keturkampė piramidė, kurios priešingosios šoninės sienos statmenos pagrindui?
12. Ar visos trikampės piramidės sienos gali būti statieji trikampiai?
13. Ar iš 66 cm ilgio vielos galima padaryti taisyklingosios keturkampės piramidės, kurios pagrindo kraštinė lygi 10 cm, vielinį modelį?
14. Į kokius briaunainius trikampę prizmę padalija plokštuma, einanti per viršutinio pagrindo viršūnę ir prieš ją esančią apatinio pagrindo kraštinę?

Papildomi uždaviniai

288. Įrodykite, kad kiekvienos prizmės viršūnių skaičius lyginis, o briaunų skaičius dalus iš 3.

289. Kubo įstrižainė lygi d. Įrodykite, kad kubo paviršiaus plotas lygus $2d^2$.

290. Stačiakampio gretasienio pagrindo įstrižainė lygi l. Kampas tarp tos įstrižainės ir vienos pagrindo kraštinės lygus φ. Kampas tarp tos kraštinės ir gretasienio įstrižainės lygus θ. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą.

291. Stačiakampio gretasienio įstrižainė, lygi d, su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ, o su viena pagrindo kraštine — kampą θ. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą.

292. Taisyklingosios keturkampės prizmės pagrindo kraštinė 6 cm, šoninė briauna 8 cm. Raskite atstumą nuo pagrindo kraštinės iki jos nekertančios prizmės įstrižainės.

293. Taisyklingosios keturkampės prizmės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės B_1D ir D_1B viena kitai statmenos. Įrodykite, kad kampas tarp prizmės įstrižainių A_1C ir B_1D lygus 60°.

294. Taisyklingoji keturkampė prizmė perkirsta plokštuma, einančia per dvi jos įstrižaines. Gautojo pjūvio plotas lygus S_0, o pagrindo kraštinė lygi a. Apskaičiuokite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

295. Pasvirojo gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra rombas. Šoninė briauna CC_1 su pagrindo kraštinėmis CD ir CB sudaro lygius kampus. Įrodykite, kad: a) $CC_1 \perp BD$; b) BB_1D_1D — stačiakampis; c) $BD \perp AA_1C_1$; d) plokštumos AA_1C_1 ir BB_1D_1 viena kitai statmenos.

296. Taisyklingosios trikampės prizmės aukštinė lygi h. Plokštuma α, einanti per apatinio pagrindo vidurinę liniją ir su ja lygiagrečią viršutinio pagrindo kraštinę, su apatinio pagrindo plokštuma sudaro smailųjį dvisienį kampą φ. Raskite pjūvio, gauto prizmę perkirtus plokštuma α, plotą.

297. Trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra taisyklingasis trikampis ABC, BD — to trikampio aukštinė, o viršūnės A_1 projekcija — pagrindo centras. Įrodykite, kad: a) $A_1BD \perp AA_1C_1$; b) $AA_1O \perp BB_1C$; c) siena BB_1C_1C — stačiakampis.

298. Gretasienio šoninė briauna b. Jo pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė a. Viena viršutinio pagrindo viršūnė vienodai nutolusi nuo visų apatinio pagrindo viršūnių. Raskite gretasienio paviršiaus plotą.

299. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi m, o šoninio paviršiaus plotas 2 kartus didesnis už pagrindo plotą. Raskite šios piramidės aukštinę.

300. Taškai E, F ir P — taisyklingosios trikampės piramidės $DABC$ kraštinių BC, AB ir AD vidurio taškai. Per tuos taškus išvestas piramidės pjūvis. Nustatykite pjūvio rūšį, raskite jo plotą, kai piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna lygi b.

301. Dvisienis kampas prie taisyklingosios trikampės piramidės $DABC$ šoninės briaunos lygus 120°. Atstumas nuo viršūnės B iki šoninės briaunos DA lygus 16 cm. Apskaičiuokite piramidės apotemą.

302. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinės 3 cm ir 7 cm, o viena įstrižainė 6 cm. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir lygi 4 cm. Raskite piramidės šonines briaunas.

303. Piramidės pagrindas yra rombas. Dvi šoninės sienos statmenos pagrindo plokštumai ir sudaro 120° dvisienį kampą, o kitos dvi šoninės sienos į pagrindo plokštumą pasvirusios 30° kampu. Piramidės aukštinė lygi 12 cm. Apskaičiuokite piramidės paviršiaus plotą.

304. Taisyklingosios keturkampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus 60°. Įrodykite, kad dvisienis kampas tarp šoninės sienos ir piramidės pagrindo 2 kartus mažesnis už dvisienį kampą prie šoninės briaunos.

305. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi h, plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α. Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

306. Taisyklingosios keturkampės piramidės aukštinė lygi h ir su šoninės sienos plokštuma sudaro kampą φ. Raskite piramidės paviršiaus plotą.

307. Taisyklingosios piramidės $MABCD$ $AM = b$, $AD = a$. a) Nubraižykite piramidės pjūvį, gautą perkirtus ją plokštuma α, einančia per pagrindo įstrižainę BD bei lygiagrečia su briauna MA. Raskite pjūvio plotą. b) Įrodykite, kad taškai M ir C yra vienodai nutolę nuo plokštumos α.

308. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė 5 cm, o mažesnioji įstrižainė 6 cm. Piramidės aukštinė, lygi 3,2 cm, eina per rombo įstrižainių susikirtimo tašką. Raskite piramidės sienų aukštines.

309. Piramidės pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės 6 dm ir 8 dm. Jos šoninės briaunos lygios, aukštinė 6 dm. Apskaičiuokite piramidės pjūvio, einančio per mažesniąją kraštinę ir aukštinės vidurio tašką, plotą.

310. Piramidės $DABC$ briauna DA statmena plokštumai ABC. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą, kai $AB = AC = 25$ cm, $BC = 40$ cm, $AH = 8$ cm; čia AH — piramidės aukštinė.

311. Piramidės $DABC$ pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės $AC = 13$ cm, $AB = 15$ cm, $CB = 14$ cm. Šoninė briauna DA statmena pagrindo plokštumai ir lygi 9 cm. a) Apskaičiuokite piramidės paviršiaus plotą. b) Įrodykite, kad statmens, nuleisto iš viršūnės A į sienos BDC plokštumą, pagrindas yra tos sienos aukštinėje, ir raskite to statmens ilgį.

312. Taisyklingosios n-kampės piramidės šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite kampo tarp pagrindo plokštumos ir šoninės briaunos tangentą.

313. Taisyklingosios trikampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės 12 dm ir 6 dm, o jos aukštinė lygi 1 dm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą.

314. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinė lygi 63 cm, apotema — 65 cm, o pagrindų kraštinių santykis 7 : 3. Raskite piramidės pagrindo kraštines.

315. Įrodykite, kad taisyklingojo oktaedro sienų centrai yra kubo viršūnės.

316. Įrodykite, kad taisyklingojo tetraedro sienų centrai yra kito taisyklingojo tetraedro viršūnės.

317. Įrodykite, kad kubo sienų centrai yra taisyklingojo oktaedro viršūnės.

318. Įrodykite, kad taisyklingojo tetraedro dvisienio kampo ir taisyklingojo oktaedro dvisienio kampo suma lygi 180°.

319. Kiek simetrijos plokštumų, einančių per vieną viršūnę, turi taisyklingasis tetraedras?

IV SKYRIUS

VEKTORIAI ERDVĖJE

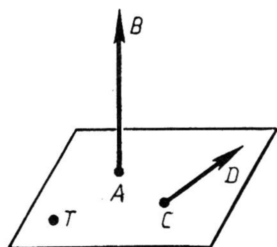
§ 1. VEKTORIUS ERDVĖJE

34. Vektoriaus sąvoka. Mokydamiesi planimetrijos susipažinome su vektoriais plokštumoje ir jų veiksmais. Erdvės vektorių pagrindinės sąvokos pateikiamos taip pat, kaip ir plokštumos vektorių sąvokos.

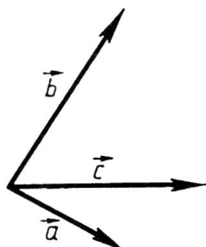
Vèktoriumi vadinama atkarpa, kurios nurodyta pradžia ir pabaiga. Vektoriaus kryptis (nuo pradžios į pabaigą) žymima rodykle. Kiekvieną erdvės tašką galima laikyti vektoriumi. Toks vektorius vadinamas *nùliniu*. Nulinio vektoriaus pradžia sutampa su pabaiga, jis neturi jokios krypties. 93 paveiksle, *a*, pavaizduoti nenuliniai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ bei nulinis vektorius $\overrightarrow{TT}$, o 93 paveiksle, *b*, — nenuliniai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, turintys bendrą pradžią. Nulinis vektorius dar žymimas ženklu $\vec{0}$.

Nenulinio vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ *ilgiù* vadinamas atkarpos *AB* ilgis. Vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ (vektoriaus $\vec{a}$) ilgis žymimas šitaip: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Laikoma, kad nulinio vektoriaus ilgis lygus nuliui: $|\vec{0}| = 0$.

Kolineariaĩsiais vektoriais vadinami du nenuliniai vektoriai, kurie yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse. Sakykime, du nenuliniai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ kolinearūs. Vienakrypčių spindulių *AB* ir *CD* vektoriai

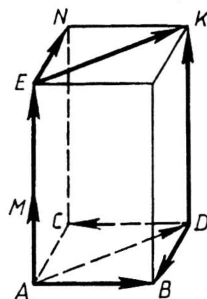


a)



b)

93 pav.

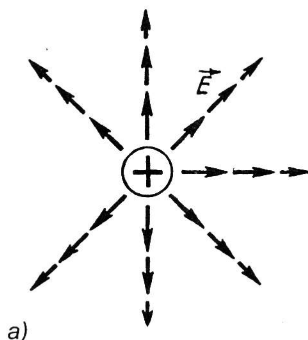


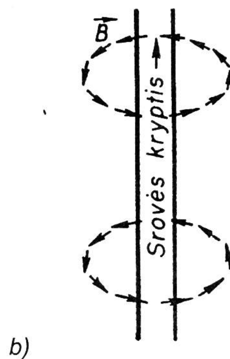
94 pav.

$\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra *vienakrỹpčiai*, o nevienakrypčių lygiagrečių spindulių vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ — *priešpriešiniai*. Laikysime, kad nulinis vektorius vienakryptis su kiekvienu vektoriumi. Užrašas $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ reiškia, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai, o užrašas $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$ — kad vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ priešpriešiniai. 94 paveiksle pavaizduotas gretasienis. Čia $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$. Vektoriai $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AM}$ nėra nei vienakrypčiai, nei priešpriešiniai, nes jie nekolinearūs.

Žemesnėse klasėse pabrėžėme, kad daugelis fizikinių dydžių, pavyzdžiui, jėga, poslinkis, greitis yra vektoriniai dydžiai. Nagrinėdami elektrinius ir magnetinius reiškinius, susiduriame su naujais vektoriniais dydžiais. Elektrinis laukas, kurį erdvėje sukuria krūviai, kiekviename erdvės taške apibūdinamas elektrinio lauko stiprumo vektoriumi. 95 paveiksle, *a*, pavaizduoti teigiamojo taškinio krūvio elektrinio lauko stiprumo vektoriai.

Elektros srovė, t. y. kryptingas krūvių judėjimas, erdvėje sukuria magnetinį lauką, kuris kiekviename erdvės taške apibūdinamas magnetinės indukcijos vektoriumi. 95 paveiksle, *b*, pavaizduoti tiesaus laidininko, kuriuo teka elektros srovė, magnetinio lauko magnetinės indukcijos vektoriai.

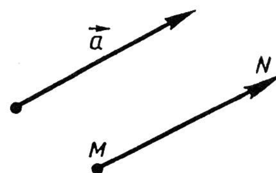




95 pav.

35. Vektorių lygumas. *Lygiaĩs vèktoriais vadinami vienakrypčiai vektoriai, kurių ilgiai lygūs.* 94 paveiksle $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, nes $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ ir $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, o $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, nes $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Kai *A* — vektoriaus $\vec{a}$ pradžia, sakoma, kad *vektorius* $\vec{a}$ *atidėtas nuo taško A*. Nesunku įrodyti, kad *nuo kiekvieno taško galima atidėti turimam vektoriui lygų vektorių, tačiau tik vieną.* Sakykime, $\vec{a}$ — turimas vektorius, *M* — turimas taškas (96 pav.). Per vektoriaus $\vec{a}$ pradžią ir pabaigą bei tašką *M* išveskime plokštumą ir joje nubrėžkime vektorių $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Aišku, vektorius $\overrightarrow{MN}$ yra ieškomasis. Iš brėžimo aišku, kad $\overrightarrow{MN}$ — vienintelis vektorius, kurio pradžia *M* ir kuris lygus vektoriui $\vec{a}$.



96 pav.

Klausimai ir uždaviniai

320. Tetraedro *ABCD* briaunų *AC, BC* ir *CD* vidurio taškai yra atitinkamai *M, N* ir *K*; $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $BD = 5$ cm. Raskite šių vektorių ilgius: a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$; b) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{KN}$.

321. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ matmenys tokie: $AD = 8$ cm, $AB = 9$ cm ir $AA_1 = 12$ cm. Raskite šių vektorių ilgius: a) $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB_1}$.

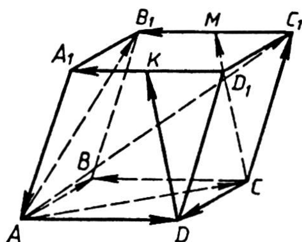
322. 97 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$; *M* ir *K* — briaunų B_1C_1 ir A_1D_1 vidurio taškai. Išvardykite: a) visas vienakrypčių vektorių poras; b) visas priešpriešinių vektorių poras; c) lygius vektorius.

323. 98 paveiksle pavaizduotas tetraedras *ABCD*, kurio briaunos lygios; *M, N, P* ir *Q* — kraštinių *AB, AD, DC* ir *BC* vidurio taškai. a) Išrašykite tame paveiksle pavaizduotų lygių vektorių visas poras. b) Nustatykite keturkampio *MNPQ* rūšį.

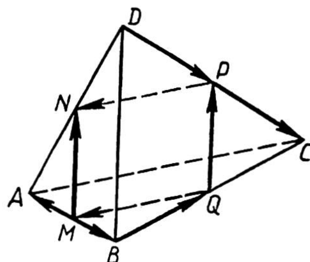
324. Ar teisingi teiginiai: a) du vektoriai, kolinearūs nenuliniam vektoriui, yra kolinearūs; b) du vektoriai, vienakrypčiai su nenuliniu vektoriumi, yra vienakrypčiai; c) du vektoriai, kolinearūs nenuliniam vektoriui, yra vienakrypčiai?

325. Žinome, kad $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Kokia: a) tiesių *AB* ir A_1B_1 tarpusavio padėtis; b) tiesės *AB* bei plokštumos, einančios per taškus A_1 ir B_1, tarpusavio padėtis; c) plokštumos, einančios per taškus *A* ir *B*, bei plokštumos, einančios per taškus A_1 ir B_1, tarpusavio padėtis?

326. 97 paveiksle pavaizduotas gretasienis; *M* ir *K* — briaunų B_1C_1 ir A_1D_1 vidurio taškai. Nurodykite vektorių, kuris gaunamas: a) nuo taško *C* atidėjus vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{DD_1}$; b) nuo taško *D* atidėjus vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{CM}$; c) nuo taško A_1 atidėjus vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{AC}$; d) nuo taško C_1 atidėjus vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{CB}$; e) nuo taško *M* atidėjus vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{KA_1}$.



97 pav.

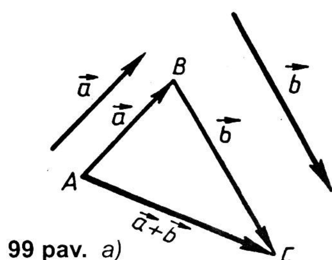


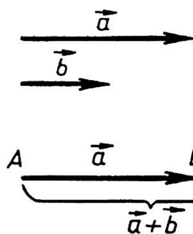
98 pav.

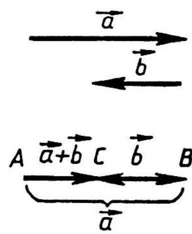
§ 2. VEKTORIŲ SUDĖTIS IR ATIMTIS. VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS

36. Vektorių sudėtis ir atimtis. Suformuluosime bet kurių dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudėties taisyklę. Nuo kurio nors taško A atidėkime vektorių $\overrightarrow{AB}$, lygų vektoriui $\vec{a}$ (99 pav.). Po to nuo taško B atidėkime vektorių $\overrightarrow{BC}$, lygų vektoriui $\vec{b}$. Vektorius $\overrightarrow{AC}$ vadinamas *vèktorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *sumà:* $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Ši vektorių sudėties taisyklė vadinama *trìkampio taisyklè*. Jos pavadinimą paaiškina 99 paveikslas, *a*. Pabrėžiame, kad pagal šią taisyklę galima sudėti ir kolinearius vektorius, nors juos sudėjus trikampis ir negaunamas. Kolineariųjų vektorių sudėtį paaiškina 99 paveikslas, *b, c*.







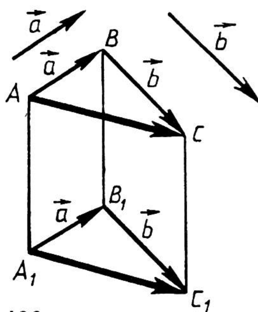
99 pav. *a)* *b)* *c)*

Taip pat, kaip ir planimetrijoje, įrodoma, kad *sumai* $\vec{a} + \vec{b}$ *neturi įtakos taško A, nuo kurio sudedant atidedamas vektorius* $\vec{a}$*, pasirinkimas.* Kitais žodžiais, jei, sudėdami vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ pagal trikampio taisyklę, tašką A pakeisime tašku A_1, tai vektorius $\overrightarrow{AC}$ bus pakeistas jam lygiu vektoriumi $\overrightarrow{A_1C_1}$ (100 pav.). Įrodykite šį teiginį savarankiškai.

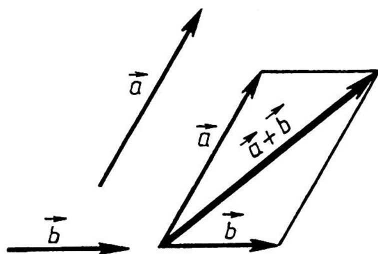
Trikampio taisyklę galima suformuluoti ir šitaip: *kad ir kurie būtų trys taškai A, B, C, teisinga lygybė*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

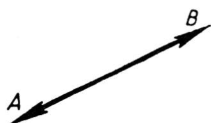
Du nekolineariuosius vektorius sudėti galima taikant iš planimetrijos žinomą *lygiagretainio taisyklę*, kurią paaiškina 101 paveikslas.



100 pav.

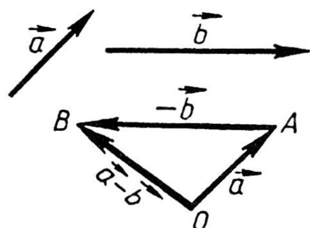


101 pav. Dviejų nekolinearių vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė.



$\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{BA}$ - priešingieji vektoriai

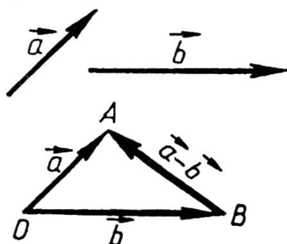
102 pav.



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

a)

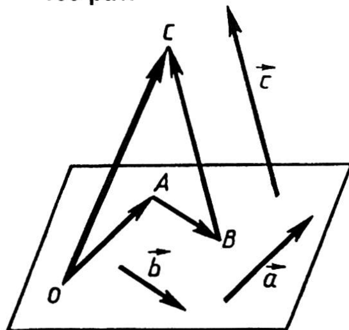


$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

b)

103 pav.



$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

104 pav.

Planimetrijoje išnagrinėtos vektorių sudėties savybės tinka ir erdvės vektoriams. Priminsime jas.

Kad ir kurie būtų vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ir* $\vec{c}$, *teisingos lygybės:*

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*perstatymo dėsnis*);

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*jungimo dėsnis*).

Du nenuliniai priešpriešiniai vektoriai, kurių ilgiai yra lygūs, vadinami *príešingaisiais vèktoriais*. Laikoma, kad nuliniam vektoriui priešingas vektorius yra nulinis vektorius. Akivaizdu, vektorius $\overrightarrow{BA}$ yra priešingas vektoriui $\overrightarrow{AB}$ (102 pav.).

Vèktorių $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *skìrtumu vadinamas toks vektorius, kurį sudėję su vektoriumi* $\vec{b}$ *gauname vektorių* $\vec{a}$. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumą $\vec{a} - \vec{b}$ galima rasti taikant formulę

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}); \qquad (1)$$

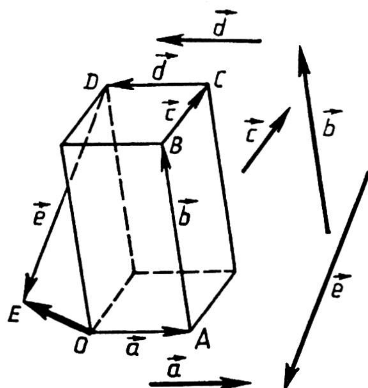
čia $(-\vec{b})$ — vektoriui $\vec{b}$ priešingas vektorius.

103 paveiksle pavaizduoti du vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumo radimo būdai.

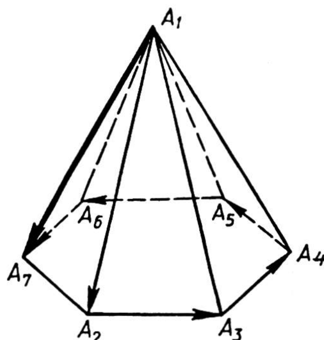
Erdvės vektorių sudėties savybės ir (1) lygybė įrodoma taip, kaip ir plokštumos vektorių sudėties savybės.

37. Kelių vektorių suma. Keli vektoriai erdvėje sudedami taip, kaip ir vektoriai plokštumoje: pirmasis vektorius sudedamas su antruoju, po to jų suma — su trečiuoju vektoriumi ir t. t. Iš vektorių sudėties savybių išplaukia, kad *kelių vektorių suma nepriklauso nuo dėmenų parašymo tvarkos.*

104 paveiksle parodyta, kaip randama trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ suma. Nuo bet kurio taško O atidėtas vektorius $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, po to nuo taško A — vektorius $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, pagaliau nuo taško B — vektorius $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gautas vektorius $\overrightarrow{OC}$, lygus $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



105 pav.



$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_7}=\overrightarrow{A_1A_7}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_1}=\vec{0}$$

106 pav.

Šitaip galima sudėti kiek norima vektorių. 105 paveiksle pavaizduota penkių vektorių ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ir $\vec{e}$) suma. Taisyklė, pagal kurią čia buvo randama kelių vektorių suma, vadinama *daugiãkampio taisyklė*. Tačiau pabrėžiame, kad „daugiakampis“, kuris gaunamas sudėjus vektorius erdvėje, gali būti erdvinis. Tuomet ne visos jo viršūnės yra vienoje plokštumoje. Pavyzdžiui, toks yra 104 paveikslo „keturkampis“ *OABC* brėžiant vektorių $\overrightarrow{OC}$.

Daugiakampio taisyklę galima suformuluoti ir šitaip: jei A_1, A_2, ... , A_n — bet kurie erdvės taškai, tai

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}\,.$$

Skyrium imant, jei taškai A_1 ir A_n, t. y. pirmo vektoriaus pradžia ir paskutinio vektoriaus pabaiga, sutampa, tai vektorių suma yra nulinis vektorius (106 pav.).

38. Vektoriaus daugyba iš skaičiaus. *Nenulinio vektoriaus* $\vec{a}$ *ir skaičiaus k sandauga vadinamas vektorius* $\vec{b}$, *kurio ilgis lygus* $|k|\,|\vec{a}|$; *vektoriai* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *vienakrypčiai, kai* $k \geq 0$, *priešpriešiniai, kai* $k < 0$. *Nulinio vektoriaus ir bet kurio skaičiaus sandauga laikomas nulinis vektorius.*

Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus k sandauga žymima šitaip: $k\vec{a}$. Iš vektoriaus ir skaičiaus sandaugos apibrėžimo išplaukia: *kad ir kurie būtų skaičius k ir vektorius* $\vec{a}$, *vektoriai* $\vec{a}$ *ir* $k\vec{a}$ *kolinearūs*. Iš to paties apibrėžimo išplaukia, kad *bet kurio vektoriaus ir nulio sandauga yra nulinis vektorius*.

Priminsime iš planimetrijos žinomas pagrindines vektoriaus ir skaičiaus daugybos savybes. Tokias pat turi ir erdvės vektoriai. *Kad ir kurie būtų vektoriai* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *bei skaičiai k ir l, teisingos lygybės:*

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (*jungimo dėsnis*);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (*pirmasis skirstymo dėsnis*);

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (*antrasis skirstymo dėsnis*).

Pabrėžiame, kad $(-1)\vec{a}$ yra vektoriui $\vec{a}$ priešingas vektorius, t. y. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. Įrodysime tai. Vektorių $(-1)\vec{a}$ ir $\vec{a}$ ilgiai lygūs: $|(-1)\vec{a}| = |-1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. Be to, jei vektorius $\vec{a}$ nenulinis, tai vektoriai $(-1)\vec{a}$ ir $\vec{a}$ priešpriešiniai.

Taip pat, kaip ir plokštumoje, galima įrodyti, kad: *jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs ir $\vec{a} \neq \vec{0}$, tai yra skaičius k, kad $\vec{b} = k\vec{a}$.*

Uždaviniai

327. 97 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Pasakykite vektorių, kurio pradžia ir pabaiga — gretasienio viršūnės ir kuris yra šių vektorių suma: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; c) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; d) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; e) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.

328. Duotas tetraedras $ABCD$. Įrodykite, kad: a) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

329. Išvardykite visus vektorius, kurie yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos ir: a) priešingi vektoriui $\overrightarrow{CB}$; b) priešingi vektoriui $\overrightarrow{B_1A}$; c) lygūs vektoriui $-\overrightarrow{DC}$; d) lygūs vektoriui $-\overrightarrow{A_1B_1}$.

330. Pavaizduokite gretasienį $ABCDA_1B_1C_1D_1$, vektorius $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ pažymėkite vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Paveiksle pavaizduokite vektorius: a) $\vec{a} - \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{c}$; c) $\vec{b} - \vec{a}$; d) $\vec{c} - \vec{b}$; e) $\vec{c} - \vec{a}$.

331. Sakykime, $ABCD$ — lygiagretainis, O — bet kuris erdvės taškas. Įrodykite, kad a) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

332. 97 paveiksle pavaizduotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ir vektorių $\overrightarrow{AB_1}$, ir vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite dviejų vektorių, kurių pradžios ir pabaigos yra paveiksle pažymėti taškai, skirtumu.

333. Erdvėje duoti keturi taškai: A, B, C ir D. Pasakykite vektorių, kurio pradžia ir pabaiga yra tie taškai ir kuris lygus šių vektorių sumai: a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$; b) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{DC}$.

334. Duotas stačiakampis gretasienis $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Įrodykite, kad: a) $|\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MM_1}| = |\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MM_1}|$; b) $|\overrightarrow{K_1L_1} - \overrightarrow{NL_1}| = |\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{MM_1}|$; c) $|\overrightarrow{NL} - \overrightarrow{M_1L}| = |\overrightarrow{K_1N} - \overrightarrow{LN}|$.

335. Suprastinkite reiškinius: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$; b) $\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QK} + \overrightarrow{PF}$; c) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$; d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$.

336. Duoti taškai A, B, C ir D. Vektorių $\overrightarrow{AB}$ išreikškite šių vektorių algebrine suma: a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$.

337. Suprastinkite reiškinius: a) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$; c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

338. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$; čia O — bet kuris erdvės taškas.

339. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Nurodykite vektorių $\vec{x}$, kurio pradžia ir pabaiga yra gretasienio viršūnės ir: a) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{CD_1} + \vec{x} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{DB}$; b) $\overrightarrow{DA} + \vec{x} + \overrightarrow{D_1B} + \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

340. Duota trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$. Nurodykite vektorių $\vec{x}$, kurio pradžia ir pabaiga yra prizmės viršūnės ir: a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{AB_1} + \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \vec{x} + \overrightarrow{BC_1}$.

341. Keturkampės piramidės, kurios viršūnė P, pagrindas yra trapecija $ABCD$. Taškas O — trapecijos vidurinės linijos vidurio taškas. Įrodykite, kad $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$.

342. Taškas P — taisyklingosios šešiakampės piramidės viršūnė. Įrodykite, kad visų vektorių, kurių pradžia yra taškas P ir kuriuos sudaro piramidės šoninės briaunos, suma lygi visų vektorių, kurių pradžia P ir kuriuos sudaro apotemos, sumai.

343. Yra žinoma, kad $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Įrodykite, kad taškai A ir B simetriški taško O atžvilgiu.

344. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės susikerta taške O. Raskite skaičių k, su kuriuo būtų teisingos šios lygybės: a) $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$; c) $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$.

345. E ir F — lygiagretainio $ABCD$ pagrindų AB ir BC vidurio taškai, O — bet kuris erdvės taškas. Išreikškite: a) vektorių $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ vektoriumi $\overrightarrow{EF}$; b) vektorių $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}$ vektoriumi $\overrightarrow{DC}$.

346. M ir N — trapecijos $ABCD$ pagrindų AB ir CD vidurio taškai, O — bet kuris erdvės taškas. Vektorių $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{BC}$.

347. Suprastinkite reiškinį: a) $2(\vec{m} + \vec{n}) - 3(4\vec{m} - \vec{n}) + \vec{m}$; b) $\vec{m} - 3(\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{p}) + 5(\vec{p} - 4\vec{m})$.

348. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{BC}$.

349. Trys taškai A, B ir M tenkina sąlygą $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$, $\lambda \neq -1$. Įrodykite, kad tie taškai yra vienoje tiesėje ir teisinga lygybė

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1+\lambda};$$

čia O — bet kuris erdvės taškas.

S p r e n d i m a s. Iš lygybės $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ išplaukia, kad vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{MB}$ kolinearūs, todėl tiesės AM ir MB arba lygiagrečios, arba sutampa. Kadangi tos tiesės turi bendrą tašką M, tai jos sutampa. Vadinasi, taškai A, B ir M yra vienoje tiesėje. Kadangi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, tai iš lygybės $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ gauname: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, arba $(1 + \lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$. Padaliję abi lygybės puses iš $(1 + \lambda)$, gauname norimą lygybę.

350. Yra žinoma, kad $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, be to, vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ paporiui nevienakrypčiai. Įrodykite, kad $|\vec{p}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

351. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ bei vektoriai $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ kolinearūs. Įrodykite, kad kolinearūs yra šie vektoriai: a) $\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{c}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$ ir $\vec{c}$; c) $\vec{a} + 3\vec{b}$ ir $\vec{c}$; d) $-\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $\vec{c}$.

352. Vektoriai $\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{a} - \vec{b}$ yra kolinearūs. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs.

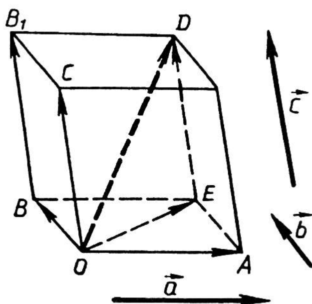
353. Vektoriai $\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $\vec{a} - 3\vec{b}$ yra kolinearūs. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs.

354. Įrodykite, kad jei vektoriai $\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{a} - \vec{b}$ nekolinearūs, tai: a) vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs; b) vektoriai $\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $2\vec{a} - \vec{b}$ nekolinearūs.

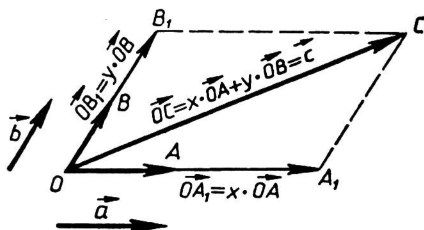
§ 3. KOMPLANARIEJI VEKTORIAI

39. Komplanarieji vektoriai. *Komplanariaisiais* vadinami vektoriai, kurie, atidėti nuo vieno taško, yra vienoje plokštumoje. Kitais žodžiais, komplanariaisiais vadinami vektoriai, kuriems lygūs vektoriai yra vienoje plokštumoje.

Aišku, kad bet kurie du vektoriai komplanarūs. Trys vektoriai, iš kurių du kolinearūs, irgi komplanarūs (paaiškinkite kodėl). Bet kurie trys vektoriai gali būti ir komplanarūs, ir nekomplanarūs. 107 paveiksle pavaizduotas gretasienis. Vektoriai $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ ir $\overrightarrow{OE}$ komplanarūs, nes, nuo taško O atidėję vektorių, lygų vektoriui $\overrightarrow{BB_1}$, gausime vektorių $\overrightarrow{OC}$,



107 pav.



108 pav.

o vektoriai $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ ir $\overrightarrow{OE}$ komplanarūs, nes yra vienoje plokštumoje — plokštumoje OCE. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ nekomplanarūs, nes vektorius $\overrightarrow{OC}$ nėra plokštumoje OAB. Išnagrinėsime *trijų vektorių komplanarumo požymį.*

Jei vektorių $\vec{c}$ *galima išreikšti vektoriais* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$, *t. y.*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (1)$$

(x ir y — kurie nors skaičiai), tai vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ir* $\vec{c}$ *komplanarūs.*

Įrodysime šį požymį. Laikysime, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs (jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ būtų kolinearūs, tai aišku, kad vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ būtų komplanarūs). Nuo bet kurio taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (108 pav.). Vektoriai $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ yra plokštumoje OAB. Akivaizdu, kad šioje plokštumoje yra vektoriai $\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, taigi ir jų suma — vektorius $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$, lygus vektoriui $\vec{c}$. Vadinasi, vektoriai $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ir $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ yra vienoje plokštumoje, todėl vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ komplanarūs.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: *jei vektoriai* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ir* $\vec{c}$ *komplanarūs, o vektoriai* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *nekolinearūs, tai vektorių* $\vec{c}$ *galima išreikšti vektoriais* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ (t. y. (1) formule), be to, *išraiškos koeficientai* (t. y. (1) formulės skaičiai x ir y) *nusakomi vienareikšmiškai.* Remdamiesi planimetrijos teorema, nusakančia vektoriaus reiškimą dviem nekolineariais vektoriais, savarankiškai įrodykite šį teiginį.

40. Gretasienio taisyklė. Tris nekomplanarius vektorius galima sudėti pagal *gretasiẽnio taisỹklę.* Paaiškinsime ją.

Sakykime, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — nekomplanarūs vektoriai. Nuo bet kurio erdvės taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ir nubraižykime gretasienį, kurio briaunos yra atkarpos OA, OB ir OC (žr. 107 pav.). To gretasienio įstrižainė OD vaizduoja vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ sumą:

$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Iš tikrųjų, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

41. Vektoriaus reiškimas trimis nekomplanariaisiais vektoriais. Jeigu

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \qquad (1)$$

(x, y ir z — tam tikri skaičiai), tai sakoma, kad *vektorius* $\vec{p}$ *išreikštas vektoriais* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ir* $\vec{c}$. Skaičiai x, y, z vadinami *išraiškos koeficientais*.

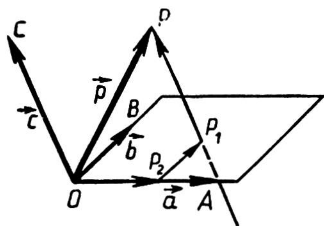
Įrodysime vektoriaus reiškimo trimis nekomplanariais vektoriais teoremą.

T e o r e m a. ***Kiekvieną vektorių galima išreikšti trimis nekomplanariaisiais vektoriais; išraiškos koeficientai nusakomi vienareikšmiškai.***

Į r o d y m a s. Sakykime, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ — turimi nekomplanarūs vektoriai. Iš pradžių įrodysime, kad kiekvieną erdvės vektorių $\vec{p}$ galima išreikšti (1) lygybe.

Pažymėkime bet kurį tašką O ir nuo to taško atidėkime vektorius (109 pav.):

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}. \qquad (2)$$



109 pav.

Per tašką P išveskime tiesę, lygiagrečią su tiese OC; P_1 — tos tiesės ir plokštumos AOB susikirtimo taškas (jei $P \in OC$, tašku P_1 pasirinkime tašką O). Po to per tašką P_1 išveskime tiesę, lygiagrečią su tiese OB; P_2 — tos tiesės ir tiesės OA susikirtimo taškas (jei $P_1 \in OB$, tašku P_2 pasirinkime tašką O). Remdamiesi daugiakampio taisykle, gausime:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (3)$$

Vektoriai $\overrightarrow{OP_2}$ ir $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ ir $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ ir $\overrightarrow{OC}$ kolinearūs, todėl yra skaičiai x, y, z, su kuriais teisingos lygybės: $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$. Šias išraiškas įrašę į (3) lygybę, gauname:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Iš čia, atsižvelgę į (2) lygybes, gausime (1) lygybę.

Dabar įrodysime, kad (1) išraiškos koeficientai nusakomi vienareikšmiškai. Tarkime, kad dar turime ir kitą lygybę: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$. Atėmę ją iš (1) lygybės ir pritaikę vektorių veiksmų savybes, gausime:

$$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}.$$

Ši lygybė teisinga tik tada, kai $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Tarę, pavyzdžiui, kad $z - z_1 \neq 0$, iš šios lygybės rastume:

$$\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}.$$

Iš čia išplaukia, kad vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ komplanarūs. Tačiau tai prieštarauja teoremos sąlygai. Vadinasi, prielaida neteisinga, taigi $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Taigi (1) išraiškos koeficientai nusakyti vienareikšmiškai. Teorema įrodyta.

Klausimai ir uždaviniai

355. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Kurie trys vektoriai komplanarūs: a) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$; b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; c) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DD_1}$; d) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$?

356. Atkarpa EF jungia tetraedro $ABCD$ briaunų AC ir BD vidurio taškus. Įrodykite, kad $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. Ar komplanarūs vektoriai $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{DC}$?

357. Duoti lygiagretainiai $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$. Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ ir $\overrightarrow{DD_1}$ komplanarūs.

358. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Pasakykite vektorių, kurio pradžia ir pabaiga yra gretasienio viršūnės ir kuris lygus šių vektorių sumai: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$; c) $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{BB_1}$; d) $\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AB}$; e) $\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$.

359. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna lygi a. Jo viršūnėse A_1, B ir D yra taškiniai krūviai q. a) Jų sukeliamo elektrinio lauko stiprį* taškuose A ir C_1 išreikškite vektoriumi $\overrightarrow{AC_1}$. b) Raskite lauko stiprio absoliučiąją reikšmę taškuose C, B_1, sienos $A_1B_1C_1D_1$ centre ir kubo centre.

360. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. a) Vektorių $\overrightarrow{BD_1}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$. b) Vektorių $\overrightarrow{B_1D_1}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ ir $\overrightarrow{A_1D_1}$.

---

* Jei taške O yra taškinis krūvis q, tai jo sukeliamo elektrinio lauko stipris $\vec{E}$ taške M išreiškiamas formule $\vec{E} = \frac{kq}{OM^3} \cdot \overrightarrow{OM}$; k priklauso nuo vienetų sistemos.

361. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės susikerta taške O. Vektorius $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{D_1O}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.

362. K — tetraedro $ABCD$ briaunos BC vidurys. Vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Sprendimas. Kadangi taškas K — atkarpos BC vidurys, tai $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$. Tačiau $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$. Vadinasi,

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

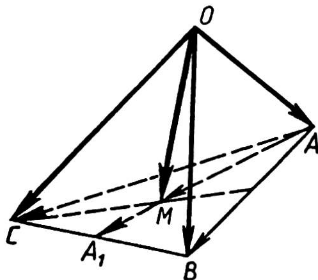
363. Piramidės viršūnė O, pagrindas — lygiagretainis $ABCD$, kurio įstrižainės susikerta taške M. Vektorius $\overrightarrow{OD}$ ir $\overrightarrow{OM}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ir $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

364. Taškas K — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos B_1C_1 vidurys. Vektorių $\overrightarrow{AK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ ir raskite to vektoriaus ilgį, kai kubo briauna lygi m.

365. Šalia lygiagretainio $ABCD$ plokštumos parinktas taškas O. Taškas M — atkarpos AB vidurys, o taškas K — atkarpos MD vidurys. Vektorius $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{OK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

366. Įrodykite, kad jei M — trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas, O — bet kuris erdvės taškas, tai

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \tag{4}$$



110 pav.

Sprendimas. Pagal trikampio pusiaukraštinių susikirtimo teoremą $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MA_1}$; čia $\overrightarrow{AA_1}$ — trikampio ABC pusiaukraštinė (110 pav.). Remdamiesi 349 uždaviniu, rašome:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{1+2} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1}}{3}.$$

Tačiau $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (paaiškinkite kodėl), todėl $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.

367. Tetraedro $ABCD$ sienos ABC pusiaukraštinę AA_1 taškas K dalija santykiu $AK : KA_1 = 3 : 7$. Vektorių $\overrightarrow{DK}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

368. M ir N yra gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų AB ir A_1D_1 vidurio taškai. Jei galima, vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektorių: a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{CM}$; c) $\overrightarrow{C_1N}$; d) $\overrightarrow{AC_1}$; e) $\overrightarrow{A_1N}$; f) $\overrightarrow{AN}$; g) $\overrightarrow{MD}$.

369. Tetraedro $OABC$ sienos ABC pusiaukraštinės susikerta taške M. Vektorių $\overrightarrow{OA}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$.

370. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ aukštinės AM ir DN susikerta taške K. Vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ išreikškite vektorius: a) $\overrightarrow{DN}$; b) $\overrightarrow{DK}$; c) $\overrightarrow{AM}$; d) $\overrightarrow{MK}$.

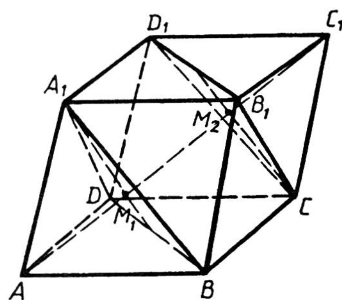
371. Tetraedro $ABCD$ sienos BCD pusiaukraštinės susikerta taške O. Įrodykite, kad atkarpos OA ilgis mažesnis už tetraedro briaunų, išeinančių iš viršūnės A, sumos trečdalį.

372. Įrodykite, kad gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė AC_1 eina per trikampių A_1BD ir CB_1D_1 pusiaukraštinių susikirtimo taškus ir tie taškai ją dalija į tris lygias atkarpas (111 pav.).

S p r e n d i m a s. Trikampio A_1BD pusiaukraštinių susikirtimo tašką pažymėkime M_1. Tetraedrui AA_1BD pritaikę (4) formulę, gauname $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. Remiantis gretasienio taisykle, gaunama: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$, todėl $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$. Iš čia išeina, kad M_1 yra įstrižainės AC_1 taškas ir $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$.

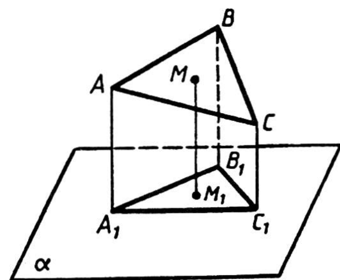
Taip pat įrodytume, kad trikampio CB_1D_1 įstrižainių susikirtimo taškas M_2 yra įstrižainėje AC_1 ir $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$.

Iš lygybių $AM_1 = \frac{1}{3}AC_1$ ir $C_1M_2 = \frac{1}{3}AC_1$ gauname, kad taškai M_1 ir M_2 gretasienio įstrižainę AC_1 dalija į tris lygias atkarpas AM_1, M_1M_2 ir M_2C_1.



111 pav.

373. Taškai A_1, B_1, C_1 ir M_1 — statmenų, nuleistų iš trikampio ABC viršūnių ir pusiaukraštinių susikirtimo taško M į plokštumą α, pagrindai (112 pav.). Įrodykite, kad $MM_1 = \frac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1)$. Ar lygybė bus teisinga, jei kurios nors trikampio ABC kraštinės kirs plokštumą α?



112 pav.

374. Atkarpos AB ir CD nėra vienoje plokštumoje, M ir N — tų atkarpų vidurio taškai. Įrodykite, kad

$$MN < \frac{1}{2}(AC + BD).$$

375. K ir M — tetraedro $ABCD$ briaunų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad atkarpų KC, KD, MA ir MB vidurio taškai yra lygiagretainio viršūnės.

IV SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Ar teisingi teiginiai: a) bet kurie du priešpriešiniai vektoriai yra kolinearūs; b) bet kurie du kolinearūs vektoriai vienakrypčiai; c) bet kurie du lygūs vektoriai yra kolinearūs; d) bet kurie du vienakrypčiai vektoriai lygūs; e) jei $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, tai $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$; f) ar yra vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, kad $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ nekolinearūs, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ nekolinearūs, o $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs?
2. Taškai A ir C simetriški taško O atžvilgiu ir $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ar taškai B ir D simetriški taško O atžvilgiu?
3. Taškai A ir C simetriški tiesės a atžvilgiu ir $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ar taškai B ir D gali būti: a) simetriški tiesės a atžvilgiu; b) nesimetriški tiesės a atžvilgiu?
4. Taškai A ir C bei taškai B ir D simetriški plokštumos α atžvilgiu. Ar vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ gali būti: a) lygūs; b) nelygūs?
5. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{a} + \vec{b}$ kolinearūs. Ar vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs?
6. Ar dviejų vektorių sumos ilgis gali būti mažesnis už kiekvieno dėmens ilgį?
7. Ar kelių nenulinių vektorių sumos ilgis gali būti lygus tų vektorių ilgių sumai?
8. Ar dviejų nenulinių vektorių skirtumo ilgis gali būti lygus tų vektorių ilgių sumai?
9. Ar dviejų nenulinių vektorių skirtumo ilgis gali būti lygus tų vektorių ilgių skirtumui?
10. Ar dviejų nenulinių vektorių sumos ilgis gali būti lygus tų vektorių ilgių skirtumui?
11. Iš kokio skaičiaus reikia padauginti nenulinį vektorių $\vec{a}$, kad gautume vektorių $\vec{b}$, tenkinantį šias sąlygas: a) $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ ir $|\vec{b}| = |\vec{a}|$; b) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ ir $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$; c) $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$ ir $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$; d) $\vec{b} = \vec{0}$?

12. Yra žinoma, kad $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$, o taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje. Kokia turi būti k reikšmė, kad tiesės AC ir BD būtų: a) lygiagrečios; b) susikertančios? Ar tiesės AB ir CD gali būti prasilenkiančios?

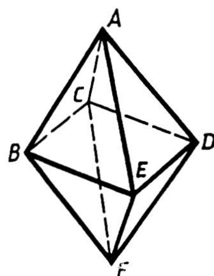
13. Ar komplanarūs vektoriai: a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $3\vec{b}$; b) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$?

14. Vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ yra komplanarūs. Ar komplanarūs vektoriai: a) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\vec{c}$; b) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$?

15. Taškai A, B ir C yra apskritimo taškai, taškas O nėra to apskritimo plokštumoje. Ar vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ gali būti komplanarūs?

Papildomi uždaviniai

376. Duotas gretasienis $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Įrodykite, kad: a) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$; b) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$; c) $\overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QP_1}$.



113 pav.

377. 113 paveiksle pavaizduotas taisyklingasis oktaedras. Įrodykite, kad: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$; b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AF}$.

378. Įrodykite, kad vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumas išreiškiamas formule $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

379. Duotas tetraedras $ABCD$. Raskite vektorių sumas: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

380. Duotas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite vektorių sumas: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{A_1A}$; c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

381. Duoti trikampiai ABC, $A_1B_1C_1$ ir du erdvės taškai O ir P. Yra žinoma, kad $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC_1}$. Įrodykite, kad trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinės lygios ir lygiagrečios su trikampio ABC kraštinėmis.

382. Su kuriomis k reikšmėmis lygybės $\vec{a} = k\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$: a) kolinearūs; b) vienakrypčiai; c) priešpriešiniai; d) priešingi?

383. Skaičiai k ir l nelygūs. Įrodykite, kad jei vektoriai $\vec{a} + k\vec{b}$ ir $\vec{a} + l\vec{b}$ nekolinearūs, tai: a) vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs; b) vektoriai $\vec{a} + k_1\vec{b}$ ir $\vec{a} + l_1\vec{b}$ nekolinearūs, kad ir kurie būtų nelygūs skaičiai k_1 ir l_1.

384. A_1, B_1 ir C_1 — trikampio ABC kraštinių BC, AC ir AB vidurio taškai, O — bet kuris erdvės taškas. Įrodykite, kad $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

385. Atkarpos, jungiančios keturkampio $ABCD$ priešingų kraštinių vidurio taškus, susikerta taške M; O — bet kuris erdvės taškas. Įrodykite, kad $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

386. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške O; M — bet kuris erdvės taškas. Įrodykite, kad $MO < \frac{1}{4}(MA + MB + MC + MD)$.

387. Trys taškai M, N ir P yra vienoje tiesėje, o taškas O nėra toje tiesėje. Vektorių $\overrightarrow{OP}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{OM}$ ir $\overrightarrow{ON}$, kai: a) $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN}$; b) $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PN}$; c) $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MN}$, k — tam tikras skaičius.

388. Įrodykite, kad vektoriai $\vec{p}$, $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ komplanarūs, kai: a) vienas iš jų nulinis; b) du iš jų kolinearūs.

389. Dviejose prasilenkiančiosiose tiesėse pažymėta po tris taškus: A_1, A_2, A_3 ir B_1, B_2, B_3; be to, $\overrightarrow{A_1A_2} = k \cdot \overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = k \cdot \overrightarrow{B_1B_3}$. Įrodykite, kad tiesės A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 lygiagrečios su tam tikra plokštuma.

390. Duotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio $AB = AD = a$, $AA_1 = 2a$. Viršūnėse B_1 ir D_1 yra krūviai q, o viršūnėje A — krūvis $2q$. Raskite elektrinio lauko stiprio absoliučiąją reikšmę: a) taške A_1; b) taške C; c) sienos $A_1B_1C_1D_1$ centre; d) sienos $ABCD$ centre.

391. K — tetraedro $ABCD$ sienos BCD pusiaukraštinės BB_1 vidurio taškas. Vektorių $\overrightarrow{AK}$ išreikškite vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

392. Panaudojant tris nekomplanarius vektorius $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{q} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AA_1}$, sudarytas gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$. To gretasienio įstrižainių vektorius išreikškite vektoriais $\vec{p}$, $\vec{q}$ ir $\vec{r}$.

393. Taškas K — gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos CC_1 vidurys. Išreikškite: a) vektorių $\overrightarrow{AK}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$; b) vektorių $\overrightarrow{DA_1}$ vektoriais $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$.

394. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos DCC_1D_1 įstrižainės susikerta taške M. Vektorių $\overrightarrow{AM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AA_1}$.

395. Įrodykite, kad jei trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai sutampa, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 lygiagrečios su tam tikra plokštuma.

396. Taškas M — tetraedro $ABCD$ briaunos BC vidurys. Vektoriais $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ ir $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ išreikškite šiuos vektorius: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{DM}$.

397. M ir N yra tetraedro sienų ADB ir BDC pusiaukraštinių susikirtimo taškai. Įrodykite, kad $MN \parallel AC$ ir raskite tų atkarpų ilgių santykį.

398. Trikampių ABC, $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ taškai A, B, C yra atkarpų A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 vidurio taškai. Įrodykite, kad trikampių ABC, $A_1B_1C_1$ ir $A_2B_2C_2$ pusiaukraštinių susikirtimo taškai yra vienoje tiesėje.

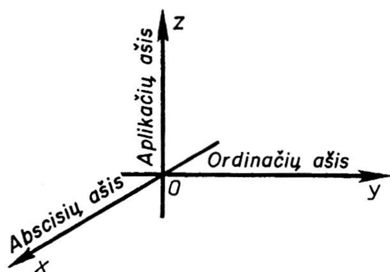
399. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra tetraedro šoninių sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškai, panašus į tetraedro pagrindą.

V SKYRIUS

KOORDINAČIŲ METODAS ERDVĖJE

§ 1. TAŠKO KOORDINATĖS IR VEKTORIAUS KOORDINATĖS

42. Stačiakampė koordinačių sistema erdvėje. Kai per erdvės tašką išvestos trys viena kitai statmenos tiesės, kiekvienoje jų pasirinkta kryptis (ji žymima rodykle) ir pasirinktas atkarpų matavimo vienetas*, sakoma, kad erdvėje turime *stačiakam̃pę koordinãčių sistèmą* (114 pav.).



114 pav.

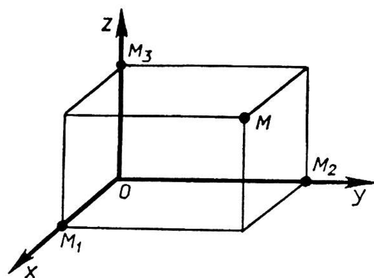
Minėtos tiesės, kuriose pasirinktos kryptys, vadinamos *koordinãčių ašimìs*, o jų bendras taškas — *koordinãčių pradžià*. Dažniausiai jis žymimas raide O. Koordinačių ašys žymimos šitaip: Ox, Oy, Oz. Jos vadinamos *abscisių ašimi, ordinačių ašimi ir aplikačių ašimi*. Visa koordinačių sistema žymima $Oxyz$. Trys plokštumos, einančios per koordinačių ašis Ox ir Oy, Oy ir Oz, Oz ir Ox, vadinamos *koordinãčių plokštumomìs* ir žymimos Oxy, Oyz, Ozx.

Taškas O kiekvieną koordinačių ašį dalija į du spindulius. Spindulys, kurio kryptis sutampa su ašies kryptimi, vadinamas *teigiamúoju pùsašiu*, jo papildomasis spindulys — *neigiamúoju pùsašiu*.

Stačiakampėje koordinačių sistemoje kiekvieną erdvės tašką M atitinka trys skaičiai. Jie vadinami to *tãško koordinãtėmis*. Jos apibrėžiamos panašiai kaip plokštumos taško koordinatės. Per tašką M išveskime tris koordinačių ašims statmenas plokštumas, tų plokštumų ir abscisių, ordinačių bei aplikačių ašių susikirtimo taškus pažymėkime M_1, M_2, M_3 (115 pav.). Taško M pirmoji koordinatė (ji vadinama *abscìsė* ir dažniausiai

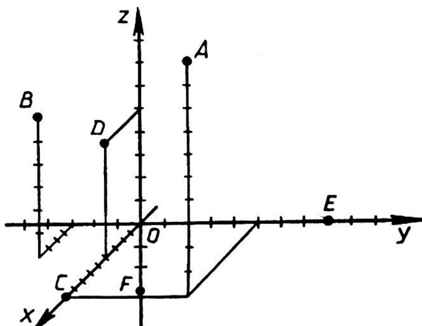
* Primename, kad, pasirinkus atkarpų matavimo vienetą, kiekvienos atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamuoju skaičiumi. Šiame skyriuje atkarpos ilgiu laikomas tas skaičius.

žymima raide x) apibrėžiama šitaip: $x = OM_1$, kai M_1 — teigiamojo pusašio taškas; $x = -OM_1$, kai M_1 — neigiamojo pusašio taškas; $x = 0$, kai taškas M_1 sutampa su tašku O. Remiantis tašku M_2, panašiai apibrėžiama taško M antroji koordinatė y (*ordinãtė*), o remiantis tašku M_3 — taško M trečioji koordinatė z (*aplikãtė*). Taško M koordinatės užrašomos šitaip: $M\ (x; y; z)$; skliaustuose pirmoji koordinatė yra abscisė, antroji — ordinatė, trečioji — aplikatė. 116 paveiksle pavaizduoti šie taškai: A (9; 5; 10), B (4; – 3; 6), C (9; 0; 0), D (4; 0; 5), E (0; 8; 0), F (0; 0; –3).



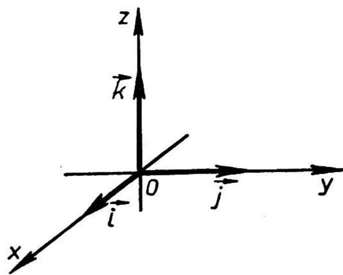
115 pav.

Kai taškas $M\ (x; y; z)$ yra koordinačių plokštumoje arba koordinačių ašyje, kai kurios jo koordinatės yra nuliai. Pavyzdžiui, kai $M \in Oxy$, taško M aplikatė lygi nuliui: $z = 0$. Kai $M \in Oxz$, $y = 0$, o kai $M \in Oyz$, $x = 0$. Kai $M \in Ox$, taško M ordinatė ir aplikatė lygios nuliui: $y = 0$, $z = 0$ (pavyzdžiui, 116 paveiksle taško C). Kai $M \in Oy$, $x = 0$ ir $z = 0$; kai $M \in Oz$, $x = 0$ ir $y = 0$. Koordinačių pradžios visos koordinatės yra nuliai: O (0; 0; 0).



116 pav.

43. Vektoriaus koordinatės. Pasirinkime erdvėje stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$. Kiekviename teigiamajame pusašyje nuo koordinačių pradžios atidėkime *vienetìnį vèktorių* — vektorių, kurio ilgis lygus vienetui. Abscisių ašies vienetinį vektorių pažymėkime $\vec{i}$, ordinačių ašies — $\vec{j}$, aplikačių ašies — $\vec{k}$ (117 pav.). Vektorius $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vadinsime *koordinãtiniais vèktoriais*. Akivaizdu, kad šie vektoriai nekomplanarūs, todėl *kiekvieną vektorių $\vec{a}$ galima išreikšti koordinatiniais vektoriais*:

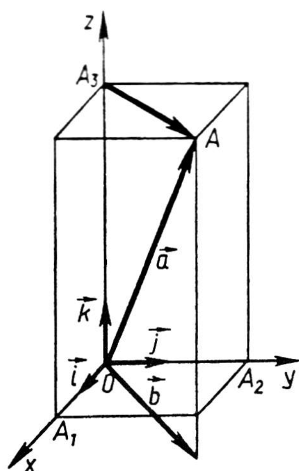


117 pav.

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \qquad (1)$$

be to, išraiškos koeficientai x, y, z nusakomi vienareikšmiškai.

(1) išraiškos koeficientai x, y ir z vadinami *vèktoriaus $\vec{a}$ koordinãtėmis turimojè koordinãčių sistèmoje*. Vektoriaus $\vec{a}$ koordinates rašysime riestiniuose skliausteliuose po vektoriaus ženklo: $\vec{a}\ \{x; y; z\}$. 118 paveiksle



118 pav.

pavaizduotas stačiakampis gretasienis, kurio matmenys tokie: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 3$, $OA_3 = 5$, o pavaizduotų vektorių koordinatės šios: $\vec{a}\ \{2; 3; 5\}$, $\vec{b}\,\{2; 3; -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\,\{2; 3; 0\}$, $\vec{i}\ \{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\,\{0; 1; 0\}$, $\vec{k}\,\{0; 0; 1\}$.

Kadangi galima parašyti, jog nulinis vektorius $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, tai nulinio vektoriaus visos koordinatės yra nuliai. *Lygių vektorių atitinkamos koordinatės lygios*, t. y. jei vektoriai $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$ lygūs, tai $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ (paaiškinkite kodėl).

Išnagrinėsime taisykles, pagal kurias, žinant vektorių koordinates, galima rasti vektorių sumos, skirtumo, vektoriaus ir skaičiaus sandaugos koordinates.

1°. *Kiekviena dviejų ar daugiau vektorių sumos koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sumai.*

Kitais žodžiais, jei $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$ — turimi vektoriai, tai vektoriaus $\vec{a} + \vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

2°. *Kiekviena dviejų vektorių skirtumo koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių skirtumui.*

Kitais žodžiais, jei $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$ — turimi vektoriai, tai vektoriaus $\vec{a} - \vec{b}$ koordinatės yra $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

3°. *Vektoriaus ir skaičiaus sandaugos kiekviena koordinatė lygi vektoriaus atitinkamos koordinatės ir to skaičiaus sandaugai.*

Kitais žodžiais, jei $\vec{a}\ \{x; y; z\}$ — turimas vektorius, α — turimas skaičius, tai vektoriaus $\alpha\vec{a}$ koordinatės yra $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

1°—3° teiginiai įrodomi taip pat, kaip ir plokštumos vektorių atitinkami teiginiai.

Kai žinomos vektorių koordinatės, taikant išnagrinėtas taisykles galima rasti vektorių algebrinės sumos koordinates.

U ž d a v i n y s. Reikia rasti vektoriaus $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ koordinates, kai $\vec{a}\,\{1; -2; 0\}$, $\vec{b}\,\{0; 3; -6\}$, $\vec{c}\,\{-2; 3; 1\}$.

S p r e n d i m a s. Pagal 3° taisyklę vektoriaus $2\vec{a}$ koordinatės yra $\{2; -4; 0\}$, o vektoriaus $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ koordinatės — $\{0; -1; 2\}$. Kadangi $\vec{p}$ =

$= (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, tai jo koordinates $\{x;\ y;\ z\}$ galima apskaičiuoti taikant 1° taisyklę: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Taigi vektoriaus $\vec{p}$ koordinatės yra $\{0;\ -2;\ 3\}$.

44. Vektoriaus koordinačių ir taškų koordinačių ryšys. Vektorius, kurio pabaiga yra tam tikras taškas, o pradžia sutampa su koordinačių pradžia, vadinamas to taško *viẽtos vèktoriumi*. Įrodysime, kad *kiekvieno taško koordinatės lygios jo vietos vektoriaus atitinkamoms koordinatėms.*

Nagrinėjamo taško M koordinates pažymėkime $(x;\ y;\ z)$. Sakykime, taškuose M_1, M_2, M_3 plokštumos, einančios per tašką M ir statmenos koordinačių ašims, kerta koordinačių ašis (119 pav.). Tada

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \qquad (2)$$

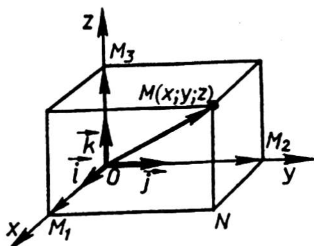
Įrodysime, kad $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Jei taškas M_1 yra abscisių ašies teigiamajame pusašyje, kaip 119 paveiksle, tai $x = OM_1$, o vektoriai $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\vec{i}$ vienakrypčiai. Tada $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Jei taškas M_1 yra abscisių ašies neigiamajame pusašyje, tai $x = -OM_1$, o vektoriai $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\vec{i}$ priešpriešiniai. Vadinasi, $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Jei taškas M_1 sutampa su tašku O, tai $x = 0$, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$. Todėl $x\vec{i} = \vec{0}$ ir vėl teisinga lygybė $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Taigi visais atvejais $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Panašiai įrodytume, kad $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = z\vec{k}$.

Šias išraiškas įrašę į (2) lygybę, gauname:

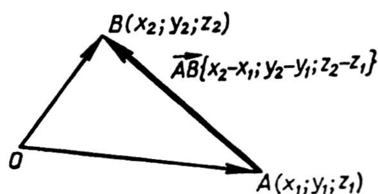
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Iš čia išplaukia, kad vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ koordinatės yra $\{x;\ y;\ z\}$, taigi taško M koordinatės lygios atitinkamoms jo vietos vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ koordinatėms. Tai ir reikėjo įrodyti.

Remdamiesi įrodytu teiginiu, vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates išreikšime jo pradžios taško A ir pabaigos taško B koordinatėmis. Sakykime, taško A koordinatės $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, o taško B koordinatės — $(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$



119 pav.

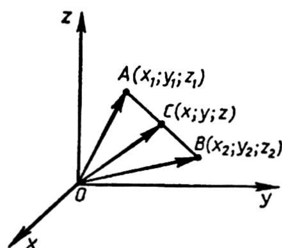


120 pav.

lygus vektorių $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OA}$ skirtumui (120 pav.), todėl jo koordinatės lygios vektorių $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OA}$ atitinkamų koordinačių skirtumui. Tačiau vektorių $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OA}$ koordinatės sutampa su taškų B ir A atitinkamomis koordinatėmis: $\overrightarrow{OB}$ $\{x_2; y_2; z_2\}$, $\overrightarrow{OA}$ $\{x_1; y_1; z_1\}$. Vadinasi, vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinatės yra $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Taigi *kiekviena vektoriaus koordinatė lygi jo pabaigos ir pradžios atitinkamų koordinačių skirtumui.*

45. Paprasčiausi uždaviniai, sprendžiami koordinačių metodu



121 pav.

a) A t k a r p o s v i d u r i o t a š k o k o o r d i n a t ė s. Sakykime, koordinačių sistemoje $Oxyz$ taško A koordinatės yra $(x_1; y_1; z_1)$, taško B koordinatės — $(x_2; y_2; z_2)$. Atkarpos AB (121 pav.) vidurio taško C koordinates $(x; y; z)$ išreikšime taškų A ir B koordinatėmis.

Kadangi C yra atkarpos AB vidurio taškas, tai

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

((1) lygybė įrodyta planimetrijoje.)

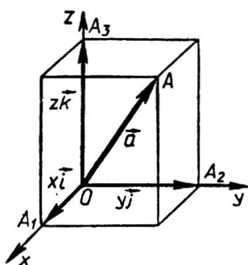
Vektorių $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$ koordinatės lygios atitinkamoms taškų C, A ir B koordinatėms: $\overrightarrow{OC}$ $\{x; y; z\}$, $\overrightarrow{OA}$ $\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\overrightarrow{OB}$ $\{x_2; y_2; z_2\}$. (1) lygybę galime pakeisti šitokiomis koordinačių lygybėmis:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2). \qquad (2)$$

Taigi *kiekviena atkarpos vidurio taško koordinatė lygi pusei jos galų atitinkamų koordinačių sumos.*

b) V e k t o r i a u s i l g i o r e i š k i m a s v e k t o r i a u s k o o r d i n a t ė m i s. Įrodysime, kad vektoriaus $\vec{a}$ $\{x; y; z\}$ ilgį galima apskaičiuoti taikant formulę

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$



122 pav.

Koordinačių ašyse atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ ir nagrinėkime vektorių $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (122 pav.). Vektoriaus $\overrightarrow{OA}$ ilgis vektorių $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ ilgiais išreiškiamas šitaip:

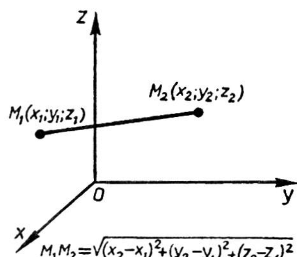
$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

Įrodysime. Jei taškas A nėra nė vienoje koordinačių plokštumoje (žr. 122 pav.), tai (4) lygybė gaunama remiantis stačiakampio gretasienio įstrižainės savybe: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Kitais atvejais (taškas A yra koordinačių plokštumoje arba koordinačių ašyje) (4) lygybę įrodykite savarankiškai.

Kadangi $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ ir $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, tai iš (4) lygybės gauname (3) formulę:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

c) Atstumas tarp dviejų taškų. Sakykime, taško M_1 koordinatės $(x_1; y_1; z_1)$, o taško M_2 koordinatės $(x_2; y_2; z_2)$. Atstumą d tarp taškų M_1 ir M_2 (123 pav.) išreikšime tų taškų koordinatėmis.



123 pav.

Nagrinėkime vektorių $\overrightarrow{M_1M_2}$. Jo koordinatės yra $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. Remdamiesi (3) formule, gauname

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Tačiau $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Vadinasi, atstumas tarp taškų $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ir $M_2(x_2; y_2; z_2)$ išreiškiamas formule

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5)$$

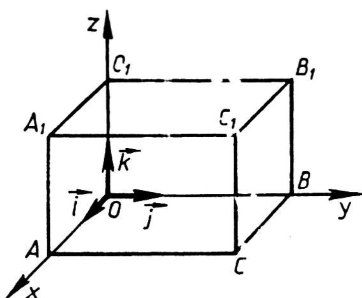
Klausimai ir uždaviniai

400. Duoti taškai: $A(3; -1; 0)$, $B(0; 0; -7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 3)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$. Kurie iš jų yra: a) abscisių ašyje; b) ordinačių ašyje; c) aplikačių ašyje; d) plokštumoje Oxy; e) plokštumoje Oyz; f) plokštumoje Oxz?

401. Raskite taškų $A(2; -3; 5)$, $B\left(3; -5; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$:
a) projekcijų į koordinačių plokštumas Oxz, Oxy ir Oyz koordinates;
b) projekcijų į koordinačių ašis Ox, Oy, Oz koordinates.

402. Duotos kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ keturių viršūnių koordinatės: $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $D(0; 1; 0)$ ir $A_1(1; 0; 0)$. Raskite kitų kubo viršūnių koordinates.

403. Parašykite vektorių $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$ koordinates.



124 pav.

404. Duoti vektoriai: $\vec{a}$ {5; –1; 2}, $\vec{b}$ {–3; –1; 0}, $\vec{c}$ {0; –1; 0}, $\vec{d}$ {0; 0; 0}. Išreikškite šiuos vektorius koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

405. 124 paveiksle pavaizduotas stačiakampis gretasienis, kurio $OA = 2$, $OB = 4$, $OO_1 = 2$. Koordinačių sistemoje $Oxyz$ raskite vektorių $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ koordinates.

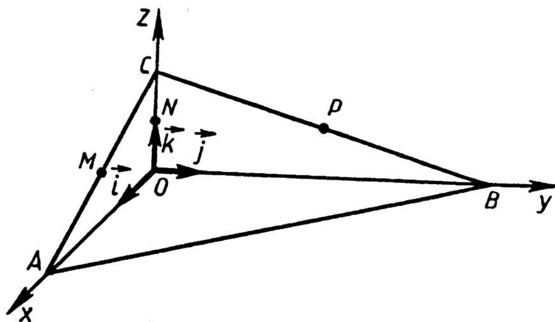
406. Įrodykite, kad kiekviena dviejų vektorių sumos (skirtumo) koordinatė lygi tų vektorių atitinkamų koordinačių sumai (skirtumui).

407. Duoti vektoriai: $\vec{a}$ {3; –5; 2}, $\vec{b}$ {0; 7; –1}, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$ ir $\vec{d}$ {–2,7; 3,1; 0,5}. Raskite šių vektorių koordinates: a) $\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{a}+\vec{c}$; c) $\vec{b}+\vec{c}$; d) $\vec{d}+\vec{b}$; e) $\vec{d}+\vec{a}$; f) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; g) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; h) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

408. Raskite vektorių $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$ (125 pav.) koordinates; čia $OA = 3$, $OB = 7$, $OC = 2$, o M, N ir P — briaunų AC, OC ir CB vidurio taškai.

409. Duoti vektoriai: $\vec{a}$ {5; –1; 1}, $\vec{b}$ {–2; 1; 0}, $\vec{c}$ {0; 0,2; 0} ir $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{7}\right\}$. Raskite šių vektorių koordinates: a) $\vec{a}-\vec{b}$; b) $\vec{b}-\vec{a}$; c) $\vec{a}-\vec{c}$; d) $\vec{d}-\vec{a}$; e) $\vec{c}-\vec{d}$; f) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; g) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; h) $2\vec{a}$; i) $-3\vec{b}$; k) $-6\vec{c}$; l) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; m) $0{,}2\vec{b}$.

410. Duoti vektoriai: $\vec{a}$ {–1; 2; 0}, $\vec{b}$ {0; –5; –2} ir $\vec{c}$ {2; 1; –3}. Raskite vektorių $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ ir $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$ koordinates.



125 pav.

411. Duoti vektoriai: $\vec{a}\{-1; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 2; -2\}$, $\vec{c}\{-3; 2; 0\}$ ir $\vec{d}\{-2; 1; -2\}$. Raskite šių vektorių koordinates: a) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; b) $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$; c) $0{,}1\vec{a} + 3\vec{b} + 0{,}7\vec{c} - 5\vec{d}$; d) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

412. Parašykite vektoriams $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\{2; 0; 0\}$, $\vec{b}\{-3; 5; -7\}$, $\vec{c}\{-0{,}3; 0; 1{,}75\}$ priešingų vektorių koordinates.

413. Ar kolinearūs vektoriai: a) $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ ir $\vec{b}\{6; 12; 16\}$; b) $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ ir $\vec{d}\{2; 3; 15\}$; c) $\vec{i}\{1; 0; 0\}$ ir $\vec{j}\{0; 1; 0\}$; d) $\vec{m}\{0; 0; 0\}$ ir $\vec{n}\{5; 7; -3\}$; e) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3}; -1; 5\right\}$ ir $\vec{q}\{-1; -3; -15\}$?

S p r e n d i m a s. a) Vektoriaus $\vec{a}\{3; 6; 8\}$ koordinatės proporcingos vektoriaus $\vec{b}\{6; 12; 16\}$ koordinatėms: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = k$; čia $k = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $\vec{a} = k\vec{b}$, todėl vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearūs.

b) Vektoriaus $\vec{c}\{1; -1; 3\}$ koordinatės neproporcingos vektoriaus $\vec{d}\{2; 3; 15\}$ koordinatėms, pavyzdžiui, $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$, todėl vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ nekolinearūs. Jei tartume, kad vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ kolinearūs, tai būtų skaičius k, su kuriuo būtų teisinga lygybė $\vec{c} = k\vec{d}$. Tačiau tada vektoriaus $\vec{c}$ koordinatės būtų proporcingos vektoriaus $\vec{d}$ koordinatėms, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai.

414. Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais būtų kolinearūs šie vektoriai: a) $\vec{a}\{15; m; 1\}$ ir $\vec{b}\{18; 12; n\}$; b) $\vec{c}\{m; 0{,}4; -1\}$ ir $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2}; n; 5\right\}$.

415. Ar komplanarūs vektoriai: a) $\vec{a}\{-3; -3; 0\}$, $\vec{i}$ ir $\vec{j}$; b) $\vec{b}\{2; 0; -3\}$, $\vec{i}$ ir $\vec{j}$; c) $\vec{c}\{1; 0; -2\}$, $\vec{i}$ ir $\vec{k}$; d) $\vec{d}\{1; -1; 2\}$, $\vec{e}\{-2; 0; 1\}$ ir $\vec{f}\{5; -1; 0\}$; e) $\vec{m}\{1; 0; 2\}$, $\vec{n}\{1; 1; -1\}$ ir $\vec{p}\{-1; 2; 4\}$; f) $\vec{q}\{0; 5; 3\}$, $\vec{r}\{3; 3; 3\}$ ir $\vec{s}\{1; 1; 4\}$?

S p r e n d i m a s. d) Vektoriai $\vec{d}\{1; -1; 2\}$ ir $\vec{e}\{-2; 0; 1\}$ nekolinearūs, nes vieno vektoriaus koordinatės neproporcingos kito vektoriaus koordinatėms. Jei vektorių $\vec{f}\{5; -1; 0\}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$, tai vektoriai $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir $\vec{f}$ komplanarūs. Jei vektoriaus $\vec{f}$ negalima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$, tai vektoriai $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir $\vec{f}$ nekomplanarūs (priešingu atveju vektorių $\vec{f}$ būtų galima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$). Taigi, norint išspręsti uždavinį, reikia patikrinti, ar vektorių $\vec{f}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$, t. y. ar egzistuoja skaičiai x ir y, su kuriais

$$\vec{f} = x\vec{d} + y\vec{e}.$$

Šią lygybę užrašę koordinatėmis, gauname:

$$5 = x - 2y,$$
$$-1 = -x,$$
$$0 = 2x + y.$$

Jei sistema x ir y atžvilgiu turi sprendinį, tai vektorių $\vec{f}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$, o jei neturi sprendinio, tai vektoriaus $\vec{f}$ negalima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$. Sistema turi sprendinį: $x = 1$, $y = -2$. Vadinasi, vektorių $\vec{f}$ galima išreikšti vektoriais $\vec{d}$ ir $\vec{e}$, taigi vektoriai $\vec{d}$, $\vec{e}$ ir $\vec{f}$ komplanarūs.

416. Duoti vektoriai: $\overrightarrow{OA}$ $\{3; 2; 1\}$, $\overrightarrow{OB}$ $\{1; -3; 5\}$ ir $\overrightarrow{OC}$ $\left\{-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4}\right\}$. Parašykite taškų A, B ir C koordinates, kai taškas O — koordinačių pradžia.

417. Duoti taškai: A (2; −3; 0), B (7; −12; 18) ir C (−8; 0; 5), taškas O — koordinačių pradžia. Parašykite vektorių $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ koordinates.

418. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates, kai: a) A (3; −1; 2), B (2; −1; 4); b) A (−2; 6; −2), B (3; −1; 0); c) $A\left(1; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.

419. Duotos trikampio ABC viršūnių koordinatės: A (1; 6; 2), B (2; 3; −1), C (−3; 4; 5). Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CA}$ išreikškite koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$.

420. Duoti taškai: A (3; −1; 5), B (2; 3; −4), C (7; 0; −1) ir D (8; −4; 8). Įrodykite, kad vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ lygūs. Ar lygūs vektoriai $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AD}$?

421. Ar taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, kai:
a) A (3; −7; 8), B (−5; 4; 1), C (27; −40; 29);
b) A (−5; 7; 12), B (4; −8; 3), C (13; −23; −6);
c) A (−4; 8; −2), B (−3; −1; 7), C (−2; −10; −16)?

S p r e n d i m a s. a) Jei vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ kolinearūs, tai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje, o jei nekolinearūs — ne vienoje tiesėje. Rasime tų vektorių koordinates: $\overrightarrow{AB}$ $\{-8; 11; -7\}$, $\overrightarrow{AC}$ $\{24; -33; 21\}$. Akivaizdu, kad $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$, todėl vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ kolinearūs. Vadinasi, taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

422. Ar taškai A, B, C ir D yra vienoje plokštumoje, kai:
a) A (−2; −13; 3), B (1; 4; 1), C (−1; −1; −4), D (0; 0; 0);
b) A (0; 1; 0), B (3; 4; −1), C (−2; −3; 0), D (2; 0; 3);
c) A (5; −1; 0), B (−2; 7; 1), C (12; −15; −7), D (1; 1; −2)?

423. Įrodykite, kad trikampio ABC, kurio viršūnių koordinatės $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$, pusiaukraštinių susikirtimo taško koordinatės yra $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

424. Taškas M — atkarpos AB vidurys. Raskite: a) taško M koordinates, kai $A\ (0;\ 3;\ -4)$, $B\ (-2;\ 2;\ 0)$; b) taško B koordinates, kai $A\ (14;\ -8;\ 5)$, $M\ (3;\ -2;\ -7)$; c) taško A koordinates, kai $B\ (0;\ 0;\ 2)$, $M\ (-12;\ 4;\ 15)$.

425. Atkarpos AB vidurio taškas yra ašyje Ox. Raskite m ir n, kai: a) $A\ (-3;\ m;\ 5)$, $B\ (2;\ -2;\ n)$; b) $A\ (1;\ 0{,}5;\ -4)$, $B\ (1;\ m;\ 2n)$; c) $A\ (0;\ m;\ n+1)$, $B\ (1;\ n;\ -m+1)$; d) $A\ (7;\ 2m+n;\ -n)$, $B\ (-5;\ -3;\ m-3)$.

426. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai: a) $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ -2;\ 3)$; b) $A(-35;\ -17;\ 20)$, $B\ (-34;\ -5;\ 8)$.

427. Raskite šių vektorių ilgius: $\vec{a}\{5;\ -1;\ 7\}$; $\vec{b}\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$; $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{d} = -2\vec{k}$; $\vec{m} = \vec{i} - 2\vec{j}$.

428. Duoti vektoriai: $\vec{a}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 3;\ 1\}$ ir $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 1\}$. Raskite: a) $|\vec{a} + \vec{b}|$; b) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; c) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$; d) $|\vec{a} - \vec{b}|$; e) $|3\vec{c}|$; f) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|$; g) $|2\vec{a} - 3\vec{c}|$.

429. Duoti taškai: $M\ (-4;\ 7;\ 0)$ ir $N\ (0;\ -1;\ 2)$. Raskite atstumą nuo koordinačių pradžios iki atkarpos MN vidurio.

430. Duoti taškai: $A\left(\frac{3}{2};\ 1;\ -2\right)$, $B\ (2;\ 2;\ -3)$ ir $C\ (2;\ 0;\ -1)$. Raskite:
a) trikampio ABC perimetrą; b) trikampio ABC pusiaukraštines.

431. Nustatykite trikampio ABC rūšį, kai: a) $A\ (9;\ 3;\ -5)$, $B\ (2;\ 10;\ -5)$, $C\ (2;\ 3;\ 2)$; b) $A\ (3;\ 7;\ -4)$, $B\ (5;\ -3;\ 2)$, $C\ (1;\ 3;\ -10)$; c) $A\ (5;\ -5;\ -1)$, $B\ (5;\ -3;\ -1)$, $C\ (4;\ -3;\ 0)$; d) $A\ (-5;\ 2;\ 0)$, $B\ (-4;\ 3;\ 0)$, $C\ (-5;\ 2;\ -2)$.

432. Raskite atstumą nuo taško $A\ (-3;\ 4;\ -4)$ iki: a) koordinačių plokštumų; b) koordinačių ašių.

433. Kiekvienoje koordinačių plokštumoje raskite tašką, kurio atstumas iki taško $A\ (-1;\ 2;\ -3)$ būtų mažiausias iš visų atstumų nuo tos koordinačių plokštumos taškų iki taško A.

434. Kiekvienoje koordinačių ašyje raskite tašką, kurio atstumas nuo taško $B\ (3;\ -4;\ \sqrt{7})$ būtų mažiausias iš visų atstumų nuo tos ašies taškų iki taško B.

435. Duoti taškai: $A\ (1;\ 0;\ k)$, $B\ (-1;\ 2;\ 3)$ ir $C\ (0;\ 0;\ 1)$. Raskite tokias k reikšmes, su kuriomis trikampis ABC būtų lygiašonis.

436. Duoti taškai: A (4; 4; 0), B (0; 0; 0), C (0; 3; 4), D (1; 4; 4). Įrodykite, kad $ABCD$ — lygiašonė trapecija.

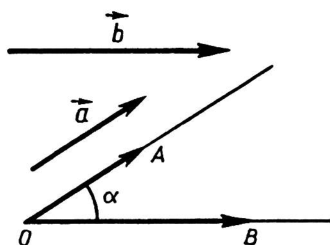
437. Raskite tašką, vienodai nutolusį nuo taškų A (–2; 3; 5) ir B (3; 2; –3) ir esantį: a) ašyje Ox; b) ašyje Oy; c) ašyje Oz.

438. Duoti taškai: A (–1; 2; 3), B (–2; 1; 2) ir C (0; –1; 1). Raskite tašką, vienodai nutolusį nuo tų taškų ir esantį: a) koordinačių plokštumoje Oxy; b) koordinačių plokštumoje Oyz; c) koordinačių plokštumoje Ozx.

439. Duoti taškai: O (0; 0; 0), A (4; 0; 0), B (0; 6; 0), C (0; 0; –2). Raskite: a) apie trikampį AOB apibrėžto apskritimo centro koordinates ir spindulį; b) taško, vienodai nutolusio nuo tetraedro $OABC$ viršūnių, koordinates.

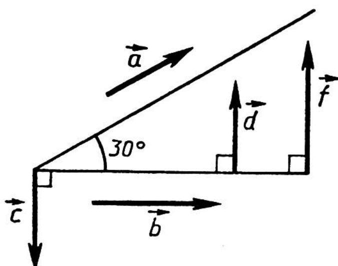
440. Stačiojo trikampio ABC statiniai $AC = b$, $BC = a$. Atkarpa CD, kurios ilgis m, statmena trikampio ABC plokštumai. Parinkite tinkamą koordinačių sistemą ir, pritaikę atstumo tarp dviejų taškų formulę, raskite atstumą nuo taško D iki trikampio įžambinės vidurio taško.

§ 2. VEKTORIŲ SKALIARINĖ DAUGYBA



126 pav.

46. Kampas tarp vektorių. Nagrinėkime du nenulinius vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Nuo bet kurio taško O atidėkime vektorius $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nevienakrypčiai, tai spinduliai OA ir OB sudaro kampą AOB (126 pav.). To kampo laipsninį matą pažymėkime raide α. Sakysime, kad *kampas tarp vektorių* $\vec{a}$ *ir* $\vec{b}$ *lygus* α. Kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai, skyrium imant, vienas jų arba abu nuliniai, laikysime, kad kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0. Kai kampas tarp vektorių lygus 90°, juos vadinsime *statmenaisiais* vektoriais. Kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ žymimas šitaip: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.



127 pav.

127 paveiksle pavaizduota keletas vektorių. Kampai tarp jų šitokie: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180°$. Tame paveiksle $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

47. Vektorių skaliarinė sandauga. *Dviejų vektorių skaliãrine sándauga vadinama jų ilgių ir kampo tarp vektorių kosinuso sandauga.* Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga žymima šitaip: $\vec{a}\,\vec{b}$. Taigi $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$.

Kaip ir planimetrijoje, teisingi šitokie teiginiai.

Nenulinių vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai tie vektoriai statmeni.

Vektoriaus skaliarinis kvadratas (t. y. *vektoriaus ir jo paties skaliarinė sandauga*) *lygus jo ilgio kvadratui.*

Tuos teiginius įrodykite savarankiškai.

Dviejų vektorių skaliarinę sandaugą galima apskaičiuoti žinant tų vektorių koordinates: *vektorių* $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *skaliarinė sandauga išreiškiama formule*

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Įrodoma taip pat, kaip ir planimetrijoje.

Kampo α tarp nenulinių vektorių $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ kosinusui apskaičiuoti taikoma formulė

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (1)$$

Įrodysime. Kadangi $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, tai $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Į paskutinę lygybę įrašę $\vec{a}\,\vec{b}$, $|\vec{a}|$ ir $|\vec{b}|$ išraiškas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinatėmis, gausime (1) formulę.

Suformuluosime vektorių skaliarinės daugybos pagrindines savybes.

Kad ir kurie būtų vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bei skaičius k, teisingos taisyklės:

1°. $\vec{a}^2 \geq 0$, be to, $\vec{a}^2 > 0$, kai $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2°. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (*perstatymo dėsnis*).

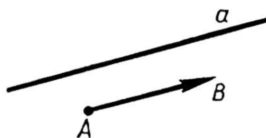
3°. $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$ (*skirstymo dėsnis*).

4°. $k(\vec{a}\,\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$ (*jungimo dėsnis*).

1°—4° teiginiai įrodomi taip pat, kaip ir planimetrijoje.

Nesunku įrodyti, kad skirstymo dėsnis tinka, kai yra daugiau dėmenų. Pavyzdžiui, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}$ (žr. 458 uždavinį).

48. Kampų tarp tiesių ir plokštumų apskaičiavimas. Apskaičiuojant kampą tarp dviejų tiesių bei kampą tarp tiesės ir plokštumos, dažnai patogu taikyti skaliarinę sandaugą. Prieš nagrinėdami tuos du kampų apskaičiavimo uždavinius, apibrėšime tiesės krypties vektoriaus sąvoką.



128 pav.

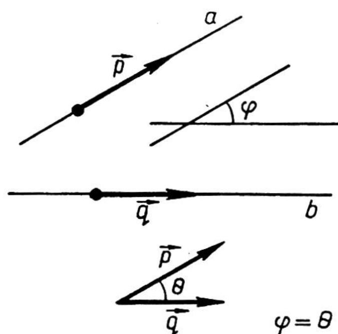
Tiesės a krypties vektoriumi vadinamas nenulinis vektorius, kuris yra arba tiesėje a, arba su ja lygiagrečioje tiesėje. 128 paveiksle vektorius $\overrightarrow{AB}$ yra tiesės a krypties vektorius.

1 uždavinys. *Reikia rasti kampą tarp dviejų tiesių (susikertančių arba prasilenkiančių), kai žinomos tų tiesių krypties vektorių koordinatės.*

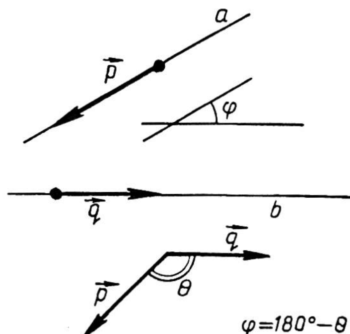
Sprendimas. Sakykime, $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ ir $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ — tiesių a ir b krypties vektoriai. Ieškomą kampą tarp tų tiesių pažymėkime raide φ. Uždaviniui išspręsti pakanka rasti $\cos\varphi$, nes tada galima rasti ir kampą φ.

Pažymėkime $\theta = \widehat{\vec{p}\,\vec{q}}$. Tada arba $\varphi = \theta$, jei $\theta \le 90^\circ$ (129 pav., *a*), arba $\varphi = 180^\circ - \theta$, jei $\theta > 90^\circ$ (129 pav., *b*). Todėl arba $\cos\varphi = \cos\theta$, arba $\cos\varphi = -\cos\theta$. Abiem atvejais $|\cos\varphi| = |\cos\theta|$. Kadangi $\varphi \le 90^\circ$, tai $\cos\varphi \ge 0$, vadinasi, $\cos\varphi = |\cos\theta|$. Pritaikę 47 skyrelio (1) formulę, gauname:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2)$$



a)

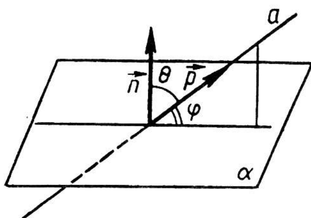


b)

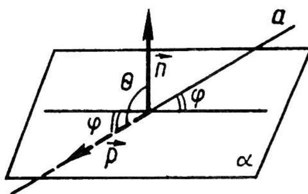
129 pav.

2 uždavinys. *Reikia rasti kampą tarp tiesės ir plokštumos, kai žinomos tiesės krypties vektoriaus koordinatės ir nenulinio vektoriaus, statmeno plokštumai, koordinatės.*

Sprendimas. Sakykime, $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ — tiesės a krypties vektorius, $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ — nenulinis vektorius, statmenas plokštumai α. Tada tiesė, kurioje yra vektorius $\vec{n}$, yra statmena plokštumai α. Raide φ pažymėkime ieškomąjį kampą tarp tiesės a ir plokštumos α, o raide θ — kampą $\widehat{\vec{p}\,\vec{n}}$.



a)



b)

130 pav.

Remiantis 130 paveikslu, nesunku įrodyti (tai padarykite savarankiškai), kad $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Todėl gauta $\sin\varphi$ apskaičiavimo išraiška yra tokia pat, kaip ir (2) lygybės dešinės pusės. Žinodami $\sin\varphi$ ir tai, kad $\varphi \leq 90^\circ$, galime rasti kampą φ.

Uždaviniai

441. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Raskite kampą tarp vektorių:
a) $\overrightarrow{B_1B}$ ir $\overrightarrow{B_1C}$; b) $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{B_1D_1}$; c) $\overrightarrow{A_1C_1}$ ir $\overrightarrow{A_1B}$; d) $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{AC}$;
e) $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{AC}$; f) $\overrightarrow{B_1C}$ ir $\overrightarrow{AD_1}$; g) $\overrightarrow{A_1D_1}$ ir $\overrightarrow{BC}$; h) $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{C_1C}$.

442. Kampas tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ lygus φ. Raskite kampus $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}$.

443. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna lygi a, taškas O_1 — sienos $A_1B_1C_1D_1$ centras. Apskaičiuokite išvardytų vektorių skaliarines sandaugas:
a) $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{B_1C_1}$; b) $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{C_1A_1}$; c) $\overrightarrow{D_1B}$ ir $\overrightarrow{AC}$; d) $\overrightarrow{BA_1}$ ir $\overrightarrow{BC_1}$;
e) $\overrightarrow{A_1O_1}$ ir $\overrightarrow{A_1C_1}$; f) $\overrightarrow{D_1O_1}$ ir $\overrightarrow{B_1O_1}$; g) $\overrightarrow{BO_1}$ ir $\overrightarrow{C_1B}$.

444. Duoti vektoriai: $\vec{a}\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$ ir $\vec{c}\{5; 6; 2\}$. Apskaičiuokite:
$\vec{a}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$.

445. Duoti vektoriai $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$. Apskaičiuokite:
a) $\vec{a}\,\vec{b}$; b) $\vec{a}\,\vec{i}$; c) $\vec{b}\,\vec{j}$; d) $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{k}$; e) $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$.

446. Duoti vektoriai: $\vec{a}\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-5; 1; 0\}$ ir $\vec{c}\{-1; -2; 1\}$. Koks kampas (smailusis, statusis ar bukasis) yra tarp vektorių: a) $\vec{a}$ ir $\vec{b}$; b) $\vec{b}$ ir $\vec{c}$; c) $\vec{a}$ ir $\vec{c}$?

447. Duotas vektorius $\vec{a}\{3; -5; 0\}$. Įrodykite, kad: a) $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}} < 90^\circ$; b) $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}} > 90^\circ$; c) $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}} = 90^\circ$.

448. Duoti vektoriai $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$ ir $\vec{b}\{5; x; -1\}$. Su kokia x reikšme: a) $\vec{a}\,\vec{b} = 3$; b) $\vec{a}\,\vec{b} = -1$; c) $\vec{a} \perp \vec{b}$?

449. Duoti vektoriai $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ir $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. Su kokia m reikšme vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienas kitam statmeni?

450. Duoti taškai: A (0; 1; 2), B ($\sqrt{2}$; 1; 2), C ($\sqrt{2}$; 2; 1) ir D (0; 2; 1). Įrodykite, kad $ABCD$ — kvadratas.

451. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių: a) $\vec{a}\{2; -2; 0\}$ ir $\vec{b}\{3; 0; -3\}$; b) $\vec{a}\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$ ir $\vec{b}\{-3; -3; 0\}$; c) $\vec{a}\{0; 5; 0\}$ ir $\vec{b}\{0; -\sqrt{3}; 1\}$; d) $\vec{a}\{-2{,}5; 2{,}5; 0\}$ ir $\vec{b}\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$; e) $\vec{a}\{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\}$ ir $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right\}$.

452. Apskaičiuokite kampus tarp vektoriaus $\vec{a}\{2; 1; 2\}$ ir koordinatinių vektorių.

453. Duoti taškai: $A(1; 3; 0)$, $B(2; 3; -1)$ ir $C(1; 2; -1)$. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{CA}$ ir $\overrightarrow{CB}$.

454. Trikampio viršūnės yra taškai A (1; –1; 3), B (3; –1; 1) ir C (–1; 1; 3). Raskite trikampio kampus, perimetrą ir plotą.

455. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Apskaičiuokite: a) kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AA_1}$ ir $\overrightarrow{AC_1}$ kosinusą; b) kampo tarp vektorių $\overrightarrow{BD_1}$ ir $\overrightarrow{DB_1}$ kosinusą; c) kampo tarp vektorių $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{AC_1}$ kosinusą.

456. Duotas stačiakampis gretasienis $ABCDA_1B_1C_1D_1$, kurio $AB = 1$, $BC = CC_1 = 2$. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{DB_1}$ ir $\overrightarrow{BC_1}$.

457. Yra žinoma, kad $\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$. Apskaičiuokite $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}$.

458. Įrodykite:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}.$$

S p r e n d i m a s. Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ sumą parašykite taip: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Remdamiesi vektorių skaliarinės daugybos skirstymo dėsniu, gauname: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c})\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b})\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d} = (\vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d}) + \vec{c}\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d} + \vec{c}\,\vec{d}$.

459. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni vektoriui $\vec{c}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 120^\circ$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Apskaičiuokite: a) skaliarines sandaugas $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(2\vec{b})$ ir $(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{c})$; b) $|\vec{a} - \vec{b}|$ ir $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$.

460. Įrodykite, kad nenulinio vektoriaus koordinatės stačiakampėje koordinačių sistemoje lygios $\{|\vec{a}|\cos\varphi_1;\ |\vec{a}|\cos\varphi_2;\ |\vec{a}|\cos\varphi_3\}$; čia

$\varphi_1 = \widehat{\vec{a}\,\vec{i}}$, $\varphi_2 = \widehat{\vec{a}\,\vec{j}}$, $\varphi_3 = \widehat{\vec{a}\,\vec{k}}$.

S p r e n d i m a s. Kai vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės yra $\{x; y; z\}$, tai $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Šią lygybę skaliariškai padauginę iš $\vec{i}$ ir pritaikę skaliarinės daugybos taisykles, gauname $\vec{a}\,\vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\vec{i} = x(\vec{i}\,\vec{i}) + y(\vec{j}\,\vec{i}) + z(\vec{k}\,\vec{i})$. Kadangi $\vec{i}\,\vec{i} = 1$, $\vec{j}\,\vec{i} = 0$, $\vec{k}\,\vec{i} = 0$, tai $\vec{a}\,\vec{i} = x$. Antra vertus, remiantis skaliarinės sandaugos apibrėžimu, gaunama $\vec{a}\,\vec{i} = |\vec{a}|\,|\vec{i}|\cos\varphi_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1$. Taigi $x = |\vec{a}|\cos\varphi_1$. Panašiai gautume lygybes $y = |\vec{a}|\cos\varphi_2$, $z = |\vec{a}|\cos\varphi_3$.

461. Tetraedro $ABCD$ visos briaunos lygios, M ir N — briaunų AD ir BC vidurio taškai. Įrodykite, kad $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

462. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = AB = AD = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 90^\circ$. Apskaičiuokite:

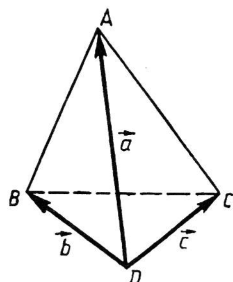
a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{D_1C_1}$; b) $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{D_1B}$; c) $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$; d) $|\overrightarrow{DB_1}|$; e) $|\overrightarrow{A_1C}|$;

f) $\cos(\widehat{\overrightarrow{DA_1}\,\overrightarrow{D_1B}})$; g) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC_1}\,\overrightarrow{DB_1}})$.

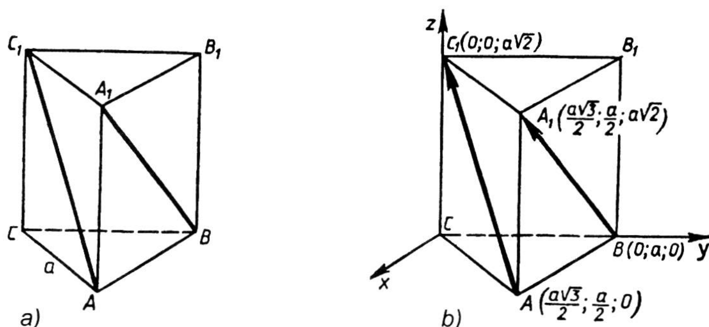
463. Tetraedro $ABCD$ priešingosios briaunos AD ir BC bei priešingosios briaunos BD ir AC statmenos. Įrodykite, kad priešingosios briaunos CD ir AB irgi statmenos.

S p r e n d i m a s. Pasirinkime vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ (131 pav.). Tada $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Pagal sąlygą $AD \perp BC$ ir $BD \perp AC$, todėl $\vec{a} \perp (\vec{c} - \vec{b})$ ir $\vec{b} \perp (\vec{c} - \vec{a})$. Vadinasi, $\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0$ ir $\vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$. Iš čia gauname $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}$ ir $\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{a}$. Iš tų dviejų lygybių išplaukia, kad $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}$, arba $(\vec{b} - \vec{a})\vec{c} = 0$. Tačiau $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, todėl $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$. Vadinasi, $AB \perp CD$. Tai ir reikėjo įrodyti.

464. Apskaičiuokite kampus tarp tiesių AB ir CD, kai: a) $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(6; -3; 2)$, $D(7; -3; 1)$;
b) $A(5; -8; -1)$, $B(6; -8; -2)$, $C(7; -5; -11)$, $D(7; -7; -9)$;
c) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; -2; -4)$, $D(-2; -4; 0)$;
d) $A(-6; -15; 7)$, $B(-7; -15; 8)$, $C(14; -10; 9)$, $D(14; -10; 7)$.



131 pav.



132 pav.

465. Duota taisyklingoji trikampė prizmė $ABCA_1B_1C_1$, kurios $AA_1 = \sqrt{2}\,AB$ (132 pav., *a*). Raskite kampą tarp tiesių AC_1 ir A_1B.

Sprendimas. Sakykime, $AB = a$. Tada $AA_1 = \sqrt{2}\,a$. Stačiakampę koordinačių sistemą pasirinkime taip, kaip parodyta 132 paveiksle, *b*. Viršūnių A, B, A_1, C_1 koordinatės tokios (paaiškinkite kodėl): $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$, $A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right)$, $C_1\ (0;\ 0;\ a\sqrt{2}\,)$. Iš to randame vektorių $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{BA_1}$ koordinates:

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}, \quad \overrightarrow{BA_1}\left\{\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a\sqrt{2}\right\}.$$

Vektoriai $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{BA_1}$ yra tiesių AC_1 ir A_1B krypties vektoriai. Ieškomą kampą φ tarp tų tiesių galima rasti taikant (2) formulę:

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + 2a^2}} = \frac{1}{2}.$$

Taigi ieškomasis kampas $\varphi = 60^\circ$.

466. Taškas M yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje AA_1, $AM : MA_1 = 3 : 1$, o N — briaunos BC vidurio taškas. Apskaičiuokite: a) kampo tarp tiesių MN ir DD_1 kosinusą; b) kampo tarp tiesių MN ir BD kosinusą; c) kampo tarp tiesių MN ir B_1D kosinusą; d) kampo tarp tiesių MN ir A_1C kosinusą.

467. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = \frac{1}{2}AA_1$. Raskite kampą tarp tiesių: a) BD ir CD_1; b) AC ir AC_1.

468. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. Apskaičiuokite: a) kampo tarp tiesių AC ir D_1B kosinusą; b) kampo tarp tiesių AB_1 ir BC_1 kosinusą; c) kampo tarp tiesių A_1D ir AC_1 kosinusą.

469. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos $ABCD$ įstrižainės susikerta taške N, taškas M yra briaunoje A_1D_1, $A_1M : MD_1 = 1 : 4$. Apskaičiuokite: a) kampo tarp tiesės MN ir sienos $ABCD$ plokštumos sinusą; b) kampo tarp tiesės MN ir sienos DD_1C_1C plokštumos sinusą; c) kampo tarp tiesės MN ir sienos AA_1D_1D plokštumos sinusą.

470. Tetraedro $ABCD$ $\angle ABD = \angle ABC = \angle DBC = 90^\circ$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Tiesė eina per briaunų AD ir BC vidurio taškus. Apskaičiuokite: a) kampo tarp tos tiesės ir sienos ABD plokštumos sinusą; b) kampo tarp tos tiesės ir sienos DBC plokštumos sinusą; c) kampo tarp tos tiesės ir sienos ABC plokštumos sinusą.

471. Įrodykite, kad kampas tarp prasilenkiančiųjų tiesių, kurių vienoje yra kubo įstrižainė, o kitoje — kubo sienos įstrižainė, lygus 90°.

472. Duotas kubas $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Įrodykite, kad tiesė PM_1 statmena plokštumoms MN_1Q_1 ir QNP_1.

473. Spinduliai OA, OB ir OC sudaro tris stačiuosius kampus AOB, AOC ir BOC. Kokį kampą sudaro kampų COA ir AOB pusiaukampinės?

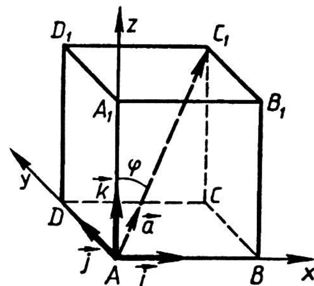
474. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC_1 = \angle DAC_1 = 60^\circ$. Raskite $\varphi = \angle A_1AC_1$.

S p r e n d i m a s. Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$, kaip parodyta 133 paveiksle. Nagrinėkime vienetinį vektorių $\vec{a}$, vienakryptį su vektoriumi $\overrightarrow{AC_1}$. Vektoriaus $\vec{a}$ koordinatės $\{\cos 60^\circ; \cos 60^\circ; \cos\varphi\}$, arba $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \cos\varphi\right\}$. Kadangi $|\vec{a}| = 1$, tai $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\varphi = 1$. Iš čia gauname $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$, arba $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kadangi kampas φ smailusis, tai $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Taigi $\varphi = 45^\circ$.

475. Tetraedro $DABC$ $DA = 5$ cm, $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle DAC = 45^\circ$. Raskite atstumą nuo viršūnės A iki trikampio DBC pusiaukraštinių susikirtimo taško.

476. Kampas tarp stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės AC_1 ir kiekvienos briaunų AB ir AD lygus 60°. Raskite kampą CAC_1.

477. Taško K projekcija kvadrato $ABCD$ plokštumoje sutampa su to kvadrato centru. Įrodykite, kad kampas tarp tiesių AK ir BD lygus 90°.



133 pav.

49. Centrinė simetrija. Planimetrijos kurse susipažinome su plokštumos judesiais (t. y. plokštumos atvaizdžiais į ją pačią, nekeičiančiais atstumo tarp taškų). Dabar susipažinsime su erdvės judesio sąvoka. Pirmiausia išsiaiškinsime, kaip suprantamas „erdvės atvaizdis į ją pačią". Sakykime, kiekvieną erdvės tašką M atitinka tam tikras taškas M_1, be to, kiekvienas erdvės taškas M_1 atitinka kurį nors tašką M. Tai *erdvẽs ãtvaizdis į̃ ją̃ pãčią*. Dar sakoma, kad tuo atvaizdžiu *taškas M atvaizduojamas į tašką M_1*. *Erdvẽs jùdesiu* laikomas erdvės atvaizdis į ją pačią, kai kiekvieni du taškai A ir B atvaizduojami į kuriuos nors du taškus A_1 ir B_1, be to, $A_1B_1 = AB$. Kitaip sakant, *erdvės judesys yra nekeičiantis atstumo tarp taškų erdvės atvaizdis į ją pačią*. Pavyzdžiui, *centrinė simetrija*, kuri kiekvieną tašką M atvaizduoja į tašką M_1, simetrišką taškui M simetrijos centro O atžvilgiu, *yra judesys*. Įrodysime. Simetrijos centrą pažymėkime raide O. Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$, kurios pradžia O. Rasime ryšį tarp dviejų taškų M $(x; y; z)$ ir M_1 $(x_1; y_1; z_1)$, simetriškų taško O atžvilgiu, koordinačių. Jei taškas M nesutampa su simetrijos centru O, tai O — atkarpos MM_1 vidurio taškas. Remdamiesi formulėmis, pagal kurias randamos atkarpos vidurio taško koordinatės, gauname:

$$\frac{x+x_1}{2}=0,\ \frac{y+y_1}{2}=0,\ \frac{z+z_1}{2}=0.$$

Iš čia $x_1 = -x$, $y_1 = -y$, $z_1 = -z$. Tos formulės teisingos ir tuo atveju, kai taškai M ir O sutampa (paaiškinkite kodėl).

Dabar pasirinkime bet kuriuos du taškus A $(x_1; y_1; z_1)$ ir B $(x_2; y_2; z_2)$. Įrodysime, kad atstumas tarp taškams A ir B simetriškų taškų A_1 ir B_1 lygus AB. Taškų A_1 ir B_1 koordinatės tokios: A_1 $(-x_1; -y_1; -z_1)$ ir B_1 $(-x_2; -y_2; -z_2)$. Remdamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, randame:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}.$$

Iš šių lygybių aišku, kad $A_1B_1 = AB$. Tai ir reikėjo įrodyti.

50. Ašinė simetrija. *Ašinè simètrija*, kurios ašis a, vadinamas erdvės atvaizdis į ją pačią, kai kiekvienas taškas M atvaizduojamas į jam simetrišką ašies a atžvilgiu tašką M_1.

Įrodysime, kad *ašinė simetrija yra judesys*. Pasirinkime tokią stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$, kurios ašis Oz sutaptų su simetrijos ašimi. Rasime dviejų taškų M $(x; y; z)$ ir M_1 $(x_1; y_1; z_1)$, simetriškų ašies Oz atžvilgiu, koordinačių ryšį. Jei taškas M nepriklauso ašiai Oz, tai ašis Oz: 1) eina per atkarpos MM_1 vidurio tašką ir 2) statmena tai atkarpai. Iš

pirmosios sąlygos, remiantis atkarpos vidurio taško formulėmis, išplaukia, kad $\frac{x+x_1}{2}=0$ ir $\frac{y+y_1}{2}=0$. Iš čia $x_1 = -x$, $y_1 = -y$. Antroji sąlyga rodo, kad taškų M ir M_1 aplikatės lygios: $z_1 = z$. Gautosios formulės tinka ir tuo atveju, kai taškas M yra ašyje Oz (paaiškinkite kodėl).

Dabar pasirinkime bet kuriuos du taškus A $(x_1; y_1; z_1)$ ir B $(x_2; y_2; z_2)$. Įrodysime, kad atstumas tarp jiems simetriškų taškų A_1 ir B_1 lygus AB. Taškų A_1 ir B_1 koordinatės šios: A_1 $(-x_1; -y_1; z_1)$, B_1 $(-x_2; -y_2; z_2)$. Remdamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, gauname:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Iš šių lygybių aišku, kad $A_1B_1 = AB$. Tai ir reikėjo įrodyti.

51. Veidrodinė simetrija. *Veidrodinė simètrija* (simetrija plokštumos α atžvilgiu) vadinamas erdvės atvaizdis į ją pačią, kai kiekvienas erdvės taškas M atvaizduojamas į jam simetrišką plokštumos α atžvilgiu tašką M_1.

Įrodysime, kad *veidrodinė simetrija yra judesys.* Pasirinkime stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$, kurios plokštuma Oxy sutaptų su simetrijos plokštuma. Rasime dviejų taškų M $(x; y; z)$ ir M_1 $(x_1; y_1; z_1)$, simetriškų plokštumos Oxy atžvilgiu, koordinačių ryšį. Jei taškas M nepriklauso plokštumai Oxy, tai ta plokštuma: 1) eina per atkarpos MM_1 vidurio tašką ir 2) statmena tai atkarpai. Iš pirmos sąlygos, remdamiesi atkarpos vidurio taško koordinačių formulėmis, gauname $\frac{z+z_1}{2}=0$. Iš čia $z_1 = -z$. Antroji sąlyga rodo, kad atkarpa MM_1 lygiagreti su ašimi Oz, todėl $x_1 = x$, $y_1 = y$. Gautos formulės tinka ir tada, kai taškas M yra plokštumoje Oxy (paaiškinkite kodėl).

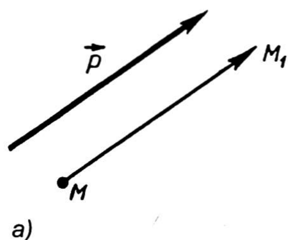
Dabar pasirinkime bet kuriuos du taškus A $(x_1; y_1; z_1)$ ir B $(x_2; y_2; z_2)$. Įrodysime, kad atstumas tarp jiems simetriškų taškų A_1 ir B_1 lygus AB. Taškų A_1 ir B_1 koordinatės: $A_1(x_1; y_1; -z_1)$, $B_1(x_2; y_2; -z_2)$. Pritaikę atstumo tarp dviejų taškų formulę, gauname:

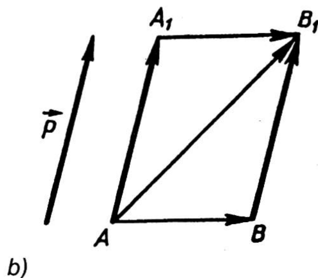
$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(-z_2+z_1)^2}.$$

Iš čia aišku, kad $A_1B_1 = AB$. Tai ir reikėjo įrodyti.

52. Lygiagretusis postūmis. Pateiksime dar vieną erdvės judesio pavyzdį. Pasirinkime kurį nors vektorių $\vec{p}$. *Lygiagrečiúoju póstūmiu* per vektorių $\vec{p}$ vadinamas erdvės atvaizdis į ją pačią, kuris kiekvieną tašką M atvaizduoja į tašką M_1, o $\overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$ (134 pav., *a*).





134 pav.

Įrodysime, kad *lygiagretusis postūmis yra judesys*. Lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\vec{p}$ bet kurie du taškai A ir B atvaizduojami į taškus A_1 ir B_1, be to, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{p}$. Reikia įrodyti, kad $A_1B_1 = AB$. Pagal trikampio taisyklę $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$. Antra vertus, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$ (134 pav., *b*). Iš tų dviejų lygybių gauname $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$, arba $\vec{p} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \vec{p}$. Iš čia $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$. Iš paskutinės lygybės išplaukia, kad $A_1B_1 = AB$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Kaip ir planimetrijoje, galima įrodyti, kad judesys atkarpą atvaizduoja į atkarpą, tiesę — į tiesę, plokštumą — į plokštumą. Taip pat galima nusakyti uždėjimo ir judesio ryšį.

Uždaviniai

478. Raskite taškus (jų koordinates), į kuriuos taškus A (0; 1; 2), B (3; –1; 4), C (1; 0; –2) atvaizduoja:
a) centrinė simetrija koordinačių pradžios atžvilgiu;
b) ašinė simetrija koordinačių ašių atžvilgiu;
c) veidrodinė simetrija koordinačių plokštumų atžvilgiu.

479. Įrodykite, kad centrinė simetrija: a) tiesę, neinančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į su ja lygiagrečią tiesę; b) tiesę, einančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į ją pačią.

480. Įrodykite, kad centrinė simetrija: a) plokštumą, neinančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į su ja lygiagrečią plokštumą; b) plokštumą, einančią per simetrijos centrą, atvaizduoja į ją pačią.

481. Įrodykite, kad ašinė simetrija: a) tiesę, lygiagrečią su ašimi, atvaizduoja į tiesę, lygiagrečią su ašimi; b) tiesę, kuri su ašimi sudaro kampą φ, atvaizduoja į tiesę, su ašimi sudarančią kampą φ.

482. Veidrodine simetrija tiesė a atvaizduojama į tiesę a_1. Įrodykite, kad tiesės a ir a_1 yra vienoje plokštumoje.

483. Veidrodine simetrija plokštumos α atžvilgiu plokštuma β atvaizduojama į plokštumą β_1. Įrodykite šiuos teiginius: a) jei $\beta \parallel \alpha$, tai $\beta_1 \parallel \alpha$; b) jei $\beta \perp \alpha$, tai plokštuma β_1 sutampa su plokštuma β.

484. Įrodykite, kad lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\vec{p}\,(\vec{p} \neq \vec{0})$: a) tiesė, nelygiagreti su vektoriumi $\vec{p}$ ir neinanti per jį, atvaizduojama į su ja lygiagrečią tiesę; b) tiesė, lygiagreti su vektoriumi $\vec{p}$ arba einanti per jį, atvaizduojama į ją pačią.

485. Trikampis $A_1B_1C_1$ gautas trikampį ABC lygiagrečiai pastūmus per vektorių $\vec{p}$. Taškai M_1 ir M — trikampių $A_1B_1C_1$ ir ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškai. Įrodykite, kad lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\vec{p}$ taškas M atvaizduojamas į tašką M_1.

486. Įrodykite, kad: a) judesys tiesę atvaizduoja į tiesę; b) judesys plokštumą atvaizduoja į plokštumą.

487. Įrodykite, kad: a) judesys atkarpą atvaizduoja į atkarpą; b) judesys kampą atvaizduoja į jam lygų kampą.

488. Įrodykite, kad: a) judesys lygiagrečias tieses atvaizduoja į lygiagrečias tieses; b) judesys lygiagrečias plokštumas atvaizduoja į lygiagrečias plokštumas.

489. Įrodykite, kad judesys: a) apskritimą atvaizduoja į tokio pat spindulio apskritimą; b) stačiakampį gretasienį atvaizduoja į tokių pat matmenų stačiakampį gretasienį.

V SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Kokia taško padėtis stačiakampės koordinačių sistemos atžvilgiu, kai: a) viena jo koordinatė lygi nuliui; b) dvi jo koordinatės lygios nuliui?
2. Paaiškinkite, kodėl visų taškų, esančių su plokštuma Oxy lygiagrečioje tiesėje, aplikatės lygios.
3. Duoti taškai $A\ (2;\ 4;\ 5)$, $B\ (3;\ x;\ y)$, $C\ (0;\ 4;\ z)$ ir $D\ (5;\ t;\ u)$. Su kokiomis x, y, z, t ir u reikšmėmis šie taškai yra: a) plokštumoje, lygiagrečioje su plokštuma Oxy; b) plokštumoje, lygiagrečioje su plokštuma Oxz; c) tiesėje, lygiagrečioje su ašimi Ox?
4. Kokios vektoriaus $\overrightarrow{CA}$ koordinatės, kai $\overrightarrow{AB}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\overrightarrow{BC}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$?
5. Nenulinio vektoriaus $\vec{a}$ pirmoji ir antroji koordinatės lygios nuliui. Kokia vektoriaus $\vec{a}$ padėtis: a) ašies Oz atžvilgiu; b) ašies Ox atžvilgiu; c) ašies Oy atžvilgiu?
6. Nenulinio vektoriaus a pirmoji koordinatė lygi nuliui. Kokia to vektoriaus padėtis: a) koordinačių plokštumos Oxz atžvilgiu; b) ašies Ox atžvilgiu?
7. Ar kolinearūs vektoriai: a) $\vec{a}\,\{-5;\ 3;\ -1\}$ ir $\vec{b}\,\{6;\ -10;\ -2\}$; b) $\vec{a}\,\{-2;\ 3;\ 7\}$ ir $\vec{b}\,\{-1;\ 1{,}5;\ 3{,}5\}$?

8. Taško M vietos vektoriaus ilgis lygus 1. Ar taško M abscisė gali būti lygi: a) 1; b) 2?

9. Vektoriaus $\vec{a}$ ilgis lygus 3. Ar viena vektoriaus $\vec{a}$ koordinatė gali būti: a) 3; b) 5?

10. Taško M_1 abscisė lygi 3, o taško M_2 abscisė lygi 6. a) Ar atkarpos M_1M_2 ilgis gali būti lygus 2? b) Kokia atkarpos M_1M_2 padėtis ašies Ox atžvilgiu, kai jos ilgis lygus 3?

11. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ilgiai a ir b. Kokia gali būti vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga, kai: a) vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vienakrypčiai; b) vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ priešpriešiniai; c) vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni; d) kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 60°; e) kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 120°?

12. Kada vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga: a) teigiama; b) neigiama; c) lygi nuliui?

13. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ar statmeni šie vektoriai: a) $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$; b) $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$; c) $\overrightarrow{A_1C_1}$ ir $\overrightarrow{AD}$; d) $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{D_1C_1}$; e) $\overrightarrow{BB}$ ir $\overrightarrow{AC}$?

14. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ pirmosios koordinatės atitinkamai lygios 1 ir 2. Ar vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinė sandauga gali būti: a) mažesnė už 2; b) lygi 2; c) didesnė už 2?

15. Kokios taško A koordinatės, kai simetrija, kurios centras A, tašką B (1; 0; 2) atvaizduoja į tašką C (2; – 1; 4)?

16. Veidrodinė simetrija tašką M (2; 1; 3) atvaizduoja į tašką M_1(2; – 2; 3). Kokia simetrijos plokštumos padėtis koordinačių ašių Ox ir Oz atžvilgiu?

17. Į katrą pirštinę (dešiniąją ar kairiąją) dešinioji pirštinė atvaizduojama veidrodine simetrija? ašine simetrija? centrine simetrija?

Papildomi uždaviniai

490. Duoti vektoriai $\vec{a}\{-5; 0; 5\}$, $\vec{b}\{-5; 5; 0\}$ ir $\vec{c}\{1; -2; -3\}$. Raskite šių vektorių koordinates: a) $3\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{c}$; b) $-0{,}1\vec{c} + 0{,}8\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$.

491. Ar kolinearūs vektoriai: a) $\vec{a}\{-5; 3; -1\}$ ir $\vec{b}\{6; -10; -2\}$; b) $\vec{a}\{-2; 3; 7\}$ ir $\vec{b}\{-1; 1{,}5; 3{,}5\}$; c) $\vec{a}\left\{-\frac{2}{3}; \frac{5}{9}; -1\right\}$ ir $\vec{b}\{6; -5; 9\}$; d) $\vec{a}\{0{,}7; -1{,}2; -5{,}2\}$ ir $\vec{b}\{-2{,}8; 4{,}8; -20{,}8\}$?

492. Duoti taškai A (–5; 7; 3) ir B (3; –11; 1). a) Raskite ašies Ox tašką, artimiausią atkarpos AB viduriui. b) Ašyse Oy ir Oz raskite taškus, turinčius tą pačią savybę.

493. Ar komplanarūs vektoriai: a) $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$, $\vec{i}+\vec{j}$ ir $\vec{i}-\vec{k}$; b) $\vec{b}\{2; 1; 1{,}5\}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ir $\vec{i}-\vec{j}$; c) $\vec{a}\{1; 1; 1\}$, $\vec{b}\{1; -1; 2\}$ ir $\vec{c}\{2; 3; -1\}$?

494. Duoti taškai A (3; 5; 4), B (4; 6; 5), C (6; –2; 1) ir D (5; –3; 0). Įrodykite, kad $ABCD$ — lygiagretainis.

495. Duoti taškai A (2; 0; 1), B (3; 2; 2) ir C (2; 3; 6). Raskite trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo tašką.

496. Duotos keturių gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ viršūnių koordinatės: A (3; 0; 2), B (2; 4; 5), A_1 (5; 3; 1), D (7; 1; 2). Raskite kitų viršūnių koordinates.

497. Atkarpos AB vidurio taškas yra plokštumoje Oxy. Raskite k, kai: a) A (2; 3; –1), B (5; 7; k); b) A (0; 4; k), B (3; –8; 2); c) A (5; 3; k), B (3; –5; $3k$).

498. Raskite vienetinių vektorių, vienakrypčių su vektoriais $\vec{a}\{2; 1; -2\}$ ir $\vec{b}\{1; 3; 0\}$, koordinates.

499. Vektoriaus $\vec{a}\{x; y; z\}$ ilgis lygus 5. Raskite vektoriaus $\vec{a}$ ordinatę, kai $x = 2$, $z = -\sqrt{5}$.

500. Duoti taškai M (2; –1; 3), N (–4; 1; –1), P (–3; 1; 2) ir Q (1; 1; 0). Apskaičiuokite atstumą tarp atkarpų MN ir PQ vidurio taškų.

501. Raskite atstumus nuo taško B (–2; 5; $\sqrt{3}$) iki koordinačių ašių.

502. Raskite ordinačių ašies tašką, vienodai nutolusį nuo taškų A (13; 2; –1) ir B (–15; 7; –18).

503*. Trikampio viršūnės A (0; 2; 2), B (2; 1; 1), C (2; 2; 2). Raskite apie trikampį apibrėžto apskritimo centro koordinates.

504. Trikampio ABC viršūnės yra plokštumos α vienoje pusėje ir nuo tos plokštumos nutolusios per 4 dm, 5 dm ir 9 dm. Raskite atstumą nuo trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško iki plokštumos α.

505*. *Tetraedro pusiaukraštine* vadinama atkarpa, jungianti tetraedro viršūnę su priešingosios sienos pusiaukraštinių susikirtimo tašku. Įrodykite, kad tetraedro pusiaukraštinės susikerta viename taške, kuris kiekvieną pusiaukraštinę dalija santykiu 3 : 1 pradedant nuo viršūnės.

506. Duoti vektoriai $\vec{a}\{-1; 5; 3\}$, $\vec{b}\{3; 0; 2\}$, $\vec{c}\left\{\frac{1}{2}; -3; 4\right\}$ ir $\vec{d}\{2; 1; 0\}$.

Apskaičiuokite skaliarines sandaugas: a) $\vec{a}\,\vec{b}$; b) $\vec{a}\,\vec{c}$; c) $\vec{d}\,\vec{d}$; d) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}$; e) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})$.

507. Duotas tetraedras $DABC$. Jo $DA = DB = DC$, $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių: a) $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{DB}$ ir $\overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{BA}$.

508. Tetraedro $ABCD$ visos briaunos lygios, D_1 — taško D projekcija plokštumoje ABC. Ar statmeni šie vektoriai: a) $\overrightarrow{D_1B}$ ir $\overrightarrow{D_1D}$; b) $\overrightarrow{DD_1}$ ir $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{DA}$ ir $\overrightarrow{BC}$; d) $\overrightarrow{D_1B}$ ir $\overrightarrow{DC}$?

509. Apskaičiuokite kampo tarp tiesių AB ir CD kosinusą, kai:
a) A (7; –8; 15), B (8; –7; 13), C (2; –3; 5), D (–1; 0; 4);
b) A (8; –2; 3), B (3; –1; 4), C (5; –2; 0), D (7; 0; –2).

510. Taškas M — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sienos BB_1C_1C centras. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių: a) $\overrightarrow{A_1D}$ ir $\overrightarrow{AM}$; b) $\overrightarrow{MD}$ ir $\overrightarrow{BB_1}$.

511. Gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAA_1 = \angle BAD = \angle DAA_1 = 60°$, $AB = AA_1 = AD = 1$. Apskaičiuokite vektorių $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{BD_1}$ ilgius.

512. Taško M projekcija rombo $ABCD$ plokštumoje sutampa su rombo įstrižainių susikirtimo tašku O. Taškas N — kraštinės BC vidurys, $AC = 8$, $DB = MO = 6$. Apskaičiuokite kampo tarp tiesės MN ir: a) tiesės BC kosinusą; b) tiesės DC kosinusą; c) tiesės AC kosinusą; d) tiesės DB kosinusą.

513. Taškas M yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje BB_1, $BM : MB_1 = 3 : 2$; taškas N yra briaunoje AD, $AN : ND = 2 : 3$. Apskaičiuokite kampo tarp tiesės MN ir: a) sienos DD_1C_1C plokštumos sinusą: b) sienos $A_1B_1C_1D_1$ plokštumos sinusą.

514. Spinduliai OA, OB, OC ir OM išsidėstę taip, kad $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$, $\angle AOM = \varphi_1$, $\angle BOM = \varphi_2$, $\angle COM = \varphi_3$. Įrodykite, kad

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

515. Spinduliai OA, OB ir OC išsidėstę taip, kad $\angle BOC = \angle BOA = 45°$, $\angle AOC = 60°$. Tiesė OH statmena plokštumai AOB. Raskite kampą tarp tiesių OH ir OC.

516. Dvisienis kampas $CABD$ lygus φ ($\varphi < 90°$). Yra žinoma, kad $AC \perp AB$ ir $\angle DAB = \theta$. Raskite $\cos \angle CAD$.

517. Dvisienis kampas $CABD$ lygus $120°$. Atkarpos CA ir DB statmenos dvisienio kampo briaunai. Be to, $AB = m$, $CA = n$, $BD = p$. Raskite CD.

518. Judesiu tiesė a atvaizduojama į tiesę a_1, plokštuma α — į plokštumą α_1. Įrodykite, kad: a) jei $a \parallel \alpha$, tai $a_1 \parallel \alpha_1$; b) jei $a \perp \alpha$, tai $a_1 \perp \alpha_1$.

519. Veidrodine simetrija plokštumos α atžvilgiu plokštuma β atvaizduojama į plokštumą β_1. Įrodykite šį teiginį: jei plokštuma β su plokštuma α sudaro kampą φ, tai ir plokštuma β_1 su plokštuma α sudaro kampą φ.

520. Įrodykite, kad: lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\vec{p}$: a) plokštuma, kurioje nėra vektoriaus $\vec{p}$ ir kuri nelygiagreti su vektoriumi $\vec{p}$, atvaizduojama į su ja lygiagrečią plokštumą; b) plokštuma, kurioje yra vektorius $\vec{p}$, bei su vektoriumi $\vec{p}$ lygiagreti plokštuma atvaizduojama į ją pačią.

VI SKYRIUS

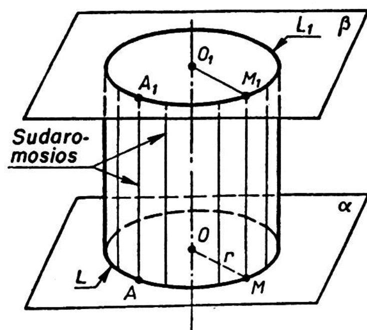
RITINYS, KŪGIS IR RUTULYS

§ 1. RITINYS

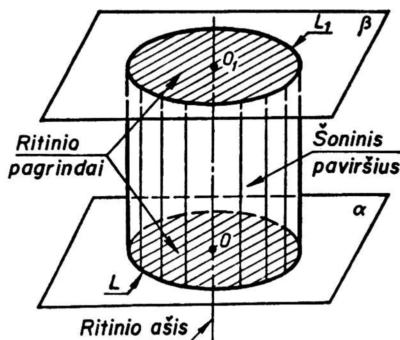
53. Ritinio sąvoka. Nagrinėkime dvi lygiagrečiąsias plokštumas α ir β bei plokštumoje α esantį apskritimą L, kurio centras O, spindulys r (135 pav.). Per kiekvieną apskritimo L tašką išveskime tiesę, statmeną plokštumai α. Tų tiesių atkarpos, esančios tarp plokštumų α ir β, sudaro *cilìndrinį pavir̃šių*. Pačios atkarpos vadinamos *cilìndrinio pavir̃šiaus sudãromosiomis* (135 paveiksle pavaizduotos sudaromosios AA_1, MM_1 ir kt.).

Iš cilindrinio paviršiaus aprašymo aišku, kad sudaromųjų galai, esantys plokštumoje α, sudaro apskritimą L, sudaromųjų galai, esantys plokštumoje β, — apskritimą L_1, kurio centras O_1, spindulys r; čia O_1 — plokštumos β ir tiesės, einančios per tašką O ir statmenos plokštumai α, susikirtimo taškas.

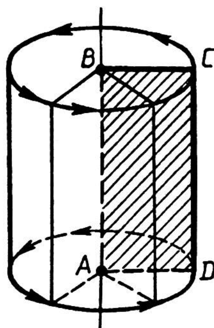
Šis teiginys teisingas, nes sudaromųjų galų, esančių plokštumoje β, aibė gaunama iš apskritimo L lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{OO_1}$. Lygiagretusis postūmis yra judesys, vadinasi, atitinka uždėjimą, o už-



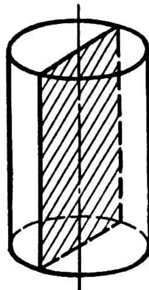
135 pav. Cilindrinis paviršius.



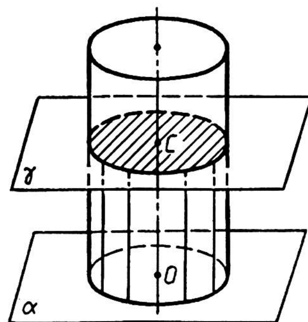
136 pav. Ritinys.



137 pav. Ritinys, gautas stačiakampį *ABCD* apsukus apie kraštinę *AB*.



a) Ritinio ašinis pjūvis.



b) Ritinio pjūvis, gautas ritinį perkirtus ašiai statmena plokštuma.

138 pav.

dedant kiekviena figūra pereina į jai lygią figūrą. Vadinasi, lygiagrečiuoju postūmiu per vektorių $\overrightarrow{OO_1}$ apskritimas L atvaizduojamas į apskritimą L_1, kurio spindulys r, centras O_1.

Kūnas, ribojamas cilindrinio paviršiaus ir dviejų skritulių, kurių kraštai L ir L_1, *vadinamas ritiniu* (136 pav.). Cilindrinis paviršius vadinamas *rìtinio šóniniu pavir̃šiumi*, o skrituliai — *rìtinio pagrindaĩs*. Cilindrinio paviršiaus sudaromosios vadinamos *rìtinio sudãromosiomis*, tiesė OO_1 — *rìtinio ašimì*.

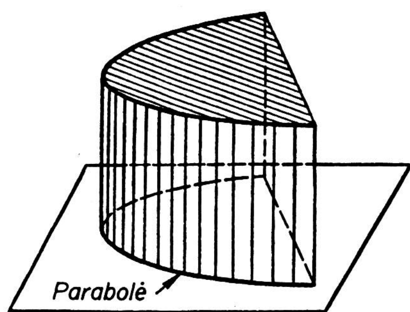
Ritinio visos sudaromosios lygiagrečios ir lygios, nes yra lygiagrečiųjų tiesių atkarpos, esančios tarp lygiagrečių plokštumų α ir β. Sudaromosios ilgis vadinamas *rìtinio aukštinè*, o pagrindo spindulys — *rìtinio spiñduliu*.

Ritinį galima gauti stačiakampį apsukus apie vieną jo kraštinę. 137 paveiksle pavaizduotas ritinys, gautas stačiakampį *ABCD* apsukus apie kraštinę *AB*. Ritinio šoninis paviršius gautas apsukus kraštinę *CD*, o pagrindai — apsukus kraštines *BC* ir *AD* apie kraštinę *AB*.

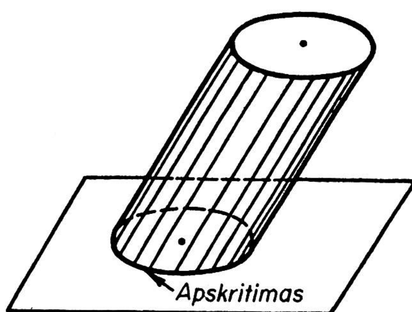
Išnagrinėsime ritinio pjūvius, gautus ritinį perkirtus įvairiomis plokštumomis. Jei kertamoji plokštuma eina per ritinio ašį, tai pjūvis yra *stačiakampis* (138 pav., *a*), kurio dvi kraštinės — ritinio sudaromosios, o kitos dvi — ritinio pagrindų skersmenys. Toks pjūvis vadinamas *ašiniù*.

Jei kertamoji plokštuma statmena ritinio ašiai, tai pjūvis yra *skritulys*. Įsitikinsime tuo. Sakykime, γ — ritinio ašiai statmena kertamoji plokštuma (138 pav., *b*). Ji nuo nagrinėjamo ritinio nukerta kūną, kuris irgi yra ritinys (paaiškinkite kodėl). To ritinio pagrindai yra du skrituliai, kurių vienas — nagrinėjamasis pjūvis.

P a s t a b a. Dažnai matome sudėtingesnių cilindro formos daiktų. 139 paveiksle, *a*, pavaizduoto cilindro kiekvienas pagrindas yra figūra, kurią riboja parabolės dalis ir atkarpa. 139 paveiksle, *b*, pavaizduotas cilindras, kurio pagrindai yra skrituliai, tačiau sudaromosios nestatmenos



a)



b)

139 pav.

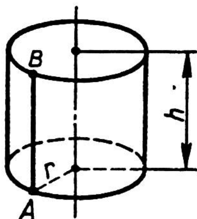
pagrindų plokštumoms (*pasvirasis cilindras*). Toliau nagrinėsime tik šio skyrelio pradžioje apibrėžtus cilindrus. Jie dar vadinami *stačiaĩsiais apskritaĩsiais ritiniaĩs.*

54. Ritinio paviršiaus plotas. 140 paveiksle, *a*, pavaizduotas ritinys. Įsivaizduokime, kad jo šoninį paviršių perpjovėme išilgai kurios nors sudaromosios AB ir ištiesėme taip, kad visos jo sudaromosios yra vienoje plokštumoje, pavyzdžiui, plokštumoje α (140 pav., *b*). Plokštumoje α gausime stačiakampį $ABB'A'$. Jo kraštinės AB ir $A'B'$ yra ritinio šoninio paviršiaus pjūvio išilgai sudaromosios AB du kraštai. Gautas stačiakampis vadinamas *rìtinio šóninio paviřšiaus išklotinė*. Stačiakampio pagrindas AA' gautas išskleidus ritinio pagrindą ribojantį apskritimą, o aukštinė AB — ritinio sudaromoji, todėl $AA' = 2\pi r$, $AB = h$; čia r — ritinio spindulys, h — ritinio aukštinė.

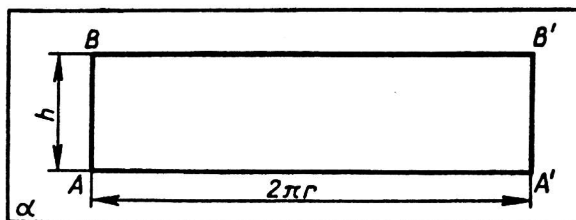
Ritinio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo išklotinės plotas. Kadangi stačiakampio $ABB'A'$ plotas lygus $AA' \cdot AB = 2\pi r \cdot h$, tai ritinio, kurio spindulys r ir aukštinė h, šoninio paviršiaus ploto $S_{\text{šon.}}$ apskaičiavimo formulę užrašome taip:

$$S_{\text{šon.}} = 2\pi rh. \qquad (1)$$

Taigi *ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus ritinio pagrindo apskritimo ilgio ir aukštinės sandaugai.*



a)



b)

140 pav.

Rìtinio pavir̃šiaus plótu vadinama ritinio šoninio paviršiaus ploto ir abiejų ritinio pagrindų plotų suma. Kadangi kiekvieno pagrindo plotas lygus πr^2, tai ritinio paviršiaus ploto $S_{rit.}$ apskaičiavimo formulė yra tokia:

$$S_{rit.} = 2\pi r(r + h). \quad (2)$$

Uždaviniai

521. Įrodykite, kad ritinio ašinis pjūvis yra stačiakampis, kurio dvi priešingos kraštinės — sudaromosios, o kitos dvi — ritinio pagrindų skersmenys. Raskite ašinio pjūvio įstrižainę, kai ritinio spindulys lygus 1,5 m, o aukštinė — 4 m.

522. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė lygi 48 cm. Kampas tarp tos įstrižainės ir ritinio sudaromosios lygus 60°. Apskaičiuokite: a) ritinio aukštinę; b) ritinio spindulį; c) ritinio pagrindo plotą.

523. Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio įstrižainė lygi 20 cm. Raskite: a) ritinio aukštinę; b) ritinio pagrindo plotą.

524. Dviejų ritinių ašiniai pjūviai lygūs. Ar lygios tų ritinių aukštinės?

525. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus 10 m^2, o pagrindo plotas — 5 m^2. Apskaičiuokite ritinio aukštinę.

526. Ritinio pagrindo ploto ir ašinio pjūvio ploto santykis $\sqrt{3}\pi : 4$. Raskite: a) kampą tarp ritinio ašinio pjūvio įstrižainės ir pagrindo plokštumos; b) kampą tarp ašinio pjūvio įstrižainių.

527. Atkarpos AB galai yra ritinio pagrindų apskritimuose. Ritinio spindulys lygus r, jo aukštinė — h, o atstumas tarp tiesės AB ir ritinio ašies — d. Raskite: a) h, kai $r = 10$ dm, $d = 8$ dm, $AB = 13$ dm; b) d, kai $h = 6$ cm, $r = 5$ cm, $AB = 10$ cm.

528. Įrodykite: jei ritinį kerta su jo ašimi lygiagreti plokštuma, kurios atstumas iki ritinio ašies mažesnis už jo spindulį, tai gautas pjūvis yra stačiakampis, o dvi jo priešingosios kraštinės yra ritinio sudaromosios.

529. Ritinio aukštinė lygi 8 cm, spindulys lygus 5 cm. Ritinys perkirstas su jo ašimi lygiagrečia plokštuma. Atstumas tarp tos plokštumos ir ritinio ašies lygus 3 cm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

530. Ritinio aukštinė 12 cm, o pagrindo spindulys 10 cm. Ritinys perkirstas su jo ašimi lygiagrečia plokštuma. Gautas pjūvis yra kvadratas. Raskite atstumą nuo ritinio ašies iki pjūvio plokštumos.

531. Ritinio aukštinė lygi 10 dm. Ritinį kerta su jo ašimi lygiagreti plokštuma, nutolusi nuo ašies per 9 dm. Pjūvio plotas lygus 240 dm^2. Apskaičiuokite ritinio spindulį.

532. Per ritinio sudaromąją AA_1 išvestos dvi jį kertančios plokštumos. Viena jų eina per ritinio ašį. Kampas tarp tų plokštumų lygus φ. Raskite pjūvių plotų santykį.

533. Ritinio aukštinė lygi h, o ašinio pjūvio plotas S. Ritinys perkirstas su jo ašimi lygiagrečia plokštuma. Atstumas tarp ritinio ašies ir tos plokštumos lygus d. Raskite pjūvio plotą.

534. Su ritinio ašimi lygiagreti plokštuma nuo pagrindo apskritimo nukerta 120° lanką. Ritinio aukštinė lygi h, o atstumas nuo ritinio ašies iki pjūvio plokštumos lygus d. Raskite pjūvio plotą.

535. Plokštuma, lygiagreti su ritinio ašimi, nuo pagrindo apskritimo nukerta 60° lanką. Ritinio sudaromoji lygi $10\sqrt{3}$ cm, atstumas nuo ritinio ašies iki kertamosios plokštumos 2 cm. Raskite pjūvio plotą.

536. Per ritinio sudaromąją išvestos dvi viena kitai statmenos plokštumos. Kiekvieno gauto pjūvio plotas lygus S. Raskite ritinio ašinio pjūvio plotą.

537. Ritinio pagrindo skersmuo 1 m, ritinio aukštinė lygi pagrindo apskritimo ilgiui. Apskaičiuokite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

538. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus S. Raskite ritinio ašinio pjūvio plotą.

539. Reikia nudažyti ritinio formos baką. Bako pagrindo skersmuo 1,5 m, aukštis 3 m. 1 kvadratiniam metrui nudažyti reikia 200 g dažų. Kiek dažų reikia visam bakui nudažyti?

540. Ritinio aukštinė 12 cm ilgesnė už jo spindulį, o ritinio paviršiaus plotas lygus 288π cm^2. Raskite ritinio spindulį ir aukštinę.

541. Kiek kvadratinių metrų lakštinės skardos reikia 4 m ilgio ir 20 cm skersmens vamzdžiui padaryti, jeigu siūlėms pridedama 2,5 % jo šoninio paviršiaus ploto?

542. Kampas tarp ritinio sudaromosios ir ašinio pjūvio įstrižainės lygus φ, ritinio pagrindo plotas S. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą.

543. Kampas tarp ritinio šoninio paviršiaus išklotinės įstrižainių lygus φ, įstrižainė — d. Raskite ritinio šoninio paviršiaus plotą ir ritinio paviršiaus plotą.

544. Kvadratinė skarda, kurios įstrižainė d, sudaro ritinio šoninį paviršių. Raskite ritinio pagrindo plotą.

545. Kvadratas, turintis a ilgio kraštinę, apsuktas apie tiesę, kurioje yra viena jo kraštinė. Raskite: a) ritinio ašinio pjūvio plotą; b) ritinio šoninio paviršiaus plotą; c) ritinio paviršiaus plotą.

546. Vienas ritinys gautas stačiakampį $ABCD$ apsukus apie tiesę AB, kitas — apie tiesę BC. a) Įrodykite, kad tų ritinių šoninių paviršių plotai lygūs. b) Raskite tų ritinių paviršių plotų santykį, kai $AB = a$, $BC = b$.

55. Kūgio sąvoka. Nagrinėkime apskritimą L, kurio centras O, bei tiesę OP, statmeną to apskritimo plokštumai. Kiekvieną apskritimo tašką atkarpa sujunkime su tašku P. Paviršius, kurį sudaro tos atkarpos, vadinamas *kū̃giniu pavir̃šiumi* (141 pav.), o pačios atkarpos — *kū̃ginio pavir̃šiaus sudãromosiomis*.

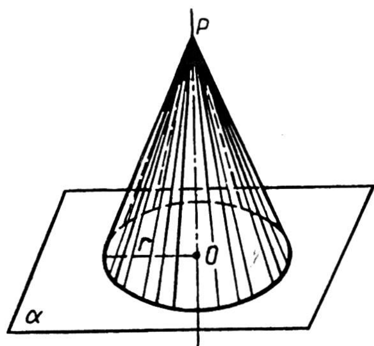
Kūnas, ribojamas kūginio paviršiaus ir skritulio, kurio kraštas L, vadinamas kū̃giu (142 pav.). Kūginis paviršius vadinamas *kū̃gio šóniniu pavir̃šiumi*, o skritulys — *kū̃gio pãgrindu*. Taškas P vadinamas *kū̃gio viršū̃ne*, o kūginio paviršiaus sudaromosios — *kū̃gio sudãromosiomis* (142 paveiksle pavaizduotos sudaromosios PA, PB ir kt.). Visos kūgio sudaromosios lygios (paaiškinkite kodėl). Tiesė OP, einanti per pagrindo centrą ir viršūnę, vadinama *kū̃gio ašimì*. Kūgio ašis yra statmena pagrindo plokštumai. Atkarpa OP vadinama *kū̃gio aukštinè*.

Kūgis gaunamas statųjį trikampį apsukus apie vieną jo statinį. 143 paveiksle pavaizduotas kūgis, gautas statųjį trikampį ABC apsukus apie statinį AB. Kūgio šoninis paviršius gautas apsukus įžambinę AC, o pagrindas — apsukus statinį BC apie statinį AB.

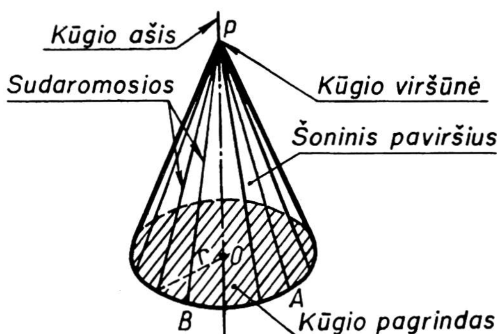
Išnagrinėsime kūgio pjūvius, gautus kūgį perkirtus įvairiomis plokštumomis.

Kai kertamoji plokštuma eina per kūgio ašį (144 pav.), pjūvis yra lygiašonis trikampis, kurio pagrindas — kūgio pagrindo skersmuo, o šoninės kraštinės — kūgio sudaromosios. Tas pjūvis vadinamas *ašiniù*.

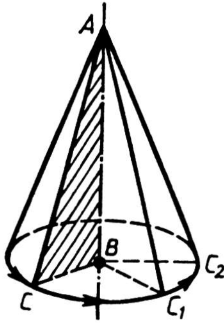
Kai kertamoji plokštuma statmena kūgio ašiai OP (145 pav.), kūgio pjūvis yra skritulys, kurio centras O_1 — kūgio ašyje. To skritulio spindulys r_1 lygus $\frac{PO_1}{PO} r$; čia r — kūgio pagrindo spindulys. Rėmėmės panašiaisiais trikampiais POM ir PO_1M_1. Tai išsamiai išnagrinėta sprendžiant 556 uždavinį.



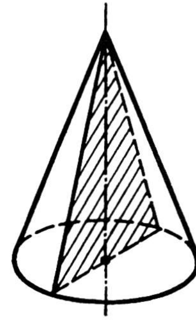
141 pav. Kūginis paviršius.



142 pav. Kūgis.



143 pav. Kūgis, gautas statųjį trikampį ABC apsukus apie statinį AB.

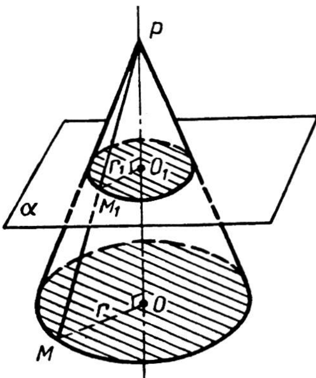


144 pav. Kūgio ašinis pjūvis.

56. Kūgio paviršiaus plotas. Kūgio, kaip ir ritinio, šoninį paviršių galima iškloti plokštumoje, prieš tai jį perpjovus išilgai vienos sudaromosios (146 pav., *a, b*). Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova (žr. 146 pav., *b*); to skritulio spindulys lygus kūgio sudaromajai, o išpjovos lanko ilgis — kūgio pagrindo apskritimo ilgiui.

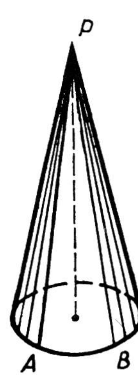
Kūgio šoninio paviršiaus plotu laikomas jo išklotinės plotas. Kūgio šoninio paviršiaus plotą $S_{\text{šon.}}$ išreikšime jo sudaromąja l ir pagrindo spinduliu r. Skritulio išpjovos (kūgio šoninio paviršiaus išklotinės; 146 pav., *b*) plotas lygus $\frac{\pi l^2}{360}\alpha$, čia α — lanko ABA' laipsninis matas. Vadinasi,

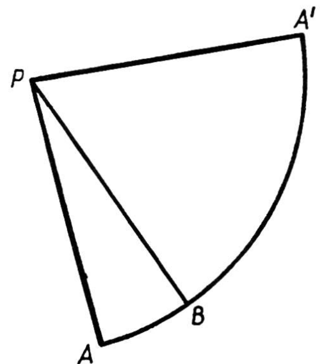
$$S_{\text{šon.}} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha. \qquad (1)$$



145 pav. Kūgio pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma α, statmena kūgio ašiai, — skritulys, kurio centras O_1, spindulys

$$r_1 = \frac{PO_1}{PO} r.$$





a) *b)*

146 pav.

Lanko laipsninį matą α išreikšime dydžiais l ir r. Kadangi lanko ABA' ilgis lygus $2\pi r$ (kūgio pagrindo apskritimo ilgiui), tai $2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha$. Iš čia $\alpha = \frac{360r}{l}$. Šią α išraišką įrašę į (1) formulę, randame

$$S_{\text{šon.}} = \pi r l. \qquad (2)$$

Taigi *kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus pagrindo apskritimo ilgio ir sudaromosios sandaugos pusei.*

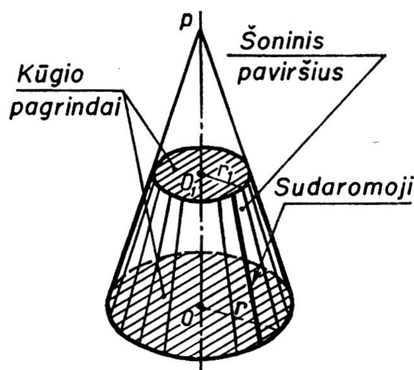
Kūgio paviršiaus plotu vadinama jo šoninio paviršiaus ploto ir pagrindo ploto suma. Kūgio paviršiaus plotas $S_{\text{k.}}$ apskaičiuojamas pagal šią formulę:

$$S_{\text{k.}} = \pi r(l + r). \qquad (3)$$

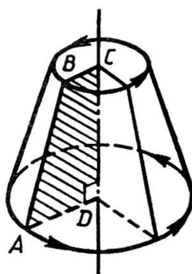
57. Nupjautinis kūgis. Bet kurį kūgį kirskime plokštuma, statmena ašiai. Tos plokštumos ir kūgio sankirta yra skritulys. Jis kūgį padalija į dvi dalis. Viena dalis yra kūgis, o kita vadinama *nupjautiniu kūgiu* (147 pav.). Pradinio kūgio pagrindas ir skritulys, gautas tą kūgį perkirtus plokštuma, vadinami *nupjautìnio kū́gio pagrindaĩs*. Atkarpa, jungianti nupjautinio kūgio pagrindų centrus, vadinama *nupjautìnio kū́gio aukštìnė*.

Kūginio paviršiaus dalis, ribojanti nupjautinį kūgį, vadinama *nupjautìnio kū́gio šóniniu pavir̃šiumi*. Kūginio paviršiaus sudaromųjų atkarpos, esančios tarp nupjautinio kūgio pagrindų, vadinamos *nupjautìnio kū́gio sudãromosiomis*. Nupjautinio kūgio visos sudaromosios lygios (tai įrodykite savarankiškai).

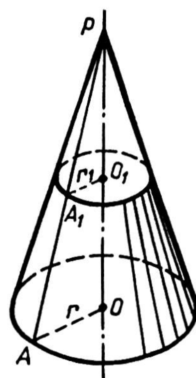
Nupjautinis kūgis gaunamas stačiąją trapeciją apsukus apie jos pagrindams statmeną šoninę kraštinę. 148 paveiksle pavaizduotas nupjau-



147 pav. Nupjautinis kūgis.



148 pav. Nupjautinis kūgis, gautas stačiąją trapeciją *ABCD* apsukus apie kraštinę *CD*.



149 pav.

tinis kūgis, gautas stačiąją trapeciją $ABCD$ apsukus apie kraštinę CD. Šoninis paviršius gautas apsukus šoninę kraštinę AB, o nupjautinio kūgio pagrindai — apsukus trapecijos pagrindus CB ir DA.

Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą $S_{\text{šon.}}$ išreikšime jo sudaromąja l bei pagrindų spinduliais r ir r_1 ($r > r_1$).

Sakykime, P — kūgio, iš kurio gautas nupjautinis kūgis, viršūnė, AA_1 — nupjautinio kūgio sudaromoji, O ir O_1 — pagrindų centrai (149 pav.). Pritaikę (2) formulę, gauname: $S_{\text{šon.}} = \pi r \cdot PA - \pi r_1 \cdot PA_1 = \pi r(PA_1 + A_1A) - \pi r_1 \cdot PA_1$. Kadangi $AA_1 = l$, tai

$$S_{\text{šon.}} = \pi rl + \pi (r - r_1) \cdot PA_1. \qquad (4)$$

Atkarpos PA_1 ilgį išreikšime dydžiais l, r ir r_1. Statieji trikampiai PO_1A_1 ir POA panašūs, nes turi bendrą smailųjį kampą P. Iš tų trikampių panašumo $\frac{PA_1}{PA} = \frac{r_1}{r}$, arba $\frac{PA_1}{PA_1 + l} = \frac{r_1}{r}$. Iš čia gauname

$$PA_1 = \frac{lr_1}{r - r_1}.$$

Šitą PA_1 išraišką įrašę į (4) formulę, gauname formulę

$$S_{\text{šon.}} = \pi(r + r_1)l.$$

Taigi *nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas lygus pusės pagrindų apskritimų ilgių sumos ir sudaromosios sandaugai.*

Uždaviniai

547. Kūgio aukštinė lygi 15 cm, o pagrindo spindulys 8 cm. Apskaičiuokite kūgio sudaromąją.

548. Kūgio sudaromoji 12 cm. Į pagrindo plokštumą ji pasvirusi kampu α. Raskite kūgio pagrindo plotą, kai: a) $\alpha = 30^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$; c) $\alpha = 60^\circ$.

549. Kūgio aukštinė lygi 8 dm. Kokiu atstumu nuo kūgio viršūnės reikia išvesti su pagrindu lygiagrečią plokštumą, kad pjūvio plotas būtų lygus: a) pusei pagrindo ploto; b) ketvirtadaliui pagrindo ploto?

550. Kūgio ašinis pjūvis — statusis trikampis. Kūgio pagrindo spindulys lygus 5 cm. Apskaičiuokite kūgio ašinio pjūvio plotą.

551. Kūgio ašinis pjūvis — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė $2r$. Apskaičiuokite kūgio pjūvio, einančio per dvi kūgio sudaromąsias, plotą, kai kampas tarp tų sudaromųjų lygus: a) 30°; b) 45°, c) 60°.

552. Kūgio aukštinė h, o kampas tarp kūgio aukštinės ir sudaromosios lygus 60°. Kūgis perkirstas plokštuma, einančia per dvi viena kitai statmenas sudaromąsias. Raskite pjūvio plotą.

553. Kūgio ašinio pjūvio plotas lygus 6 dm^2, o kūgio pagrindo plotas — 8 dm^2. Apskaičiuokite kūgio aukštinę.

554. Kūgio sudaromoji lygi l, o pagrindo spindulys r. Raskite kūgio pjūvio, einančio per kūgio viršūnę ir pagrindo stygą, plotą, kai ta styga jungia: a) 60° lanko galus; b) 90° lanko galus.

555. Kūgio aukštinė lygi 10 cm. Per kūgio viršūnę ir 60° pagrindo apskritimo lanko galus jungiančią stygą išvestas kūgio pjūvis. Raskite kūgio plotą, kai pjūvio plokštuma į pagrindo plokštumą pasvirusi: a) 30° kampu; b) 45° kampu; c) 60° kampu.

556. Kūgio viršūnė P. Jo pagrindas — skritulys, kurio spindulys r, centras O. Įrodykite, kad jei kertamoji plokštuma α statmena kūgio ašiai, tai kūgio pjūvis yra skritulys, kurio centras O_1, spindulys r_1; čia O_1 — plokštumos α ir ašies PO susikirtimo taškas, o $r_1 = \frac{PO_1}{PO} r$ (žr.145 pav.).

S p r e n d i m a s. Pirmiausia įrodysime, kad plokštumos α apskritimo, kurio spindulys r_1 ir centras O_1, kiekvienas taškas M_1 yra kurioje nors kūgio sudaromojoje, kitaip sakant, yra nagrinėjamo pjūvio taškas. Kadangi statieji trikampiai PO_1M_1 ir POM panašūs (jie turi bendrą smailųjį kampą P), tai: $OM = \frac{PO}{PO_1} \cdot O_1M_1 = \frac{PO}{PO_1} \cdot r_1 =$ $= r$. Vadinasi, taškas M yra kūgio pagrindo apskritimo taškas.

Dabar įrodysime, kad kiekvienas taškas M_1, esantis ir plokštumoje α, ir kūgio šoniniame paviršiuje, yra apskritimo, kurio spindulys r_1 ir centras O_1, taškas. Iš trikampių PO_1M_1 ir POM panašumo (PM — sudaromoji, einanti per tašką M_1) turime

$$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} \cdot r = r_1.$$

Taigi apskritimas, kurio spindulys r_1 ir centras O_1, yra kūgio šoninio paviršiaus ir plokštumos α sankirta. Todėl skritulys, kurio kraštas — tas apskritimas, yra kūgio pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma α.

557. Kūgį kerta dvi plokštumos, statmenos jo ašiai. Įrodykite, kad kūgio pjūvių, gautų jį perkirtus tomis plokštumomis, plotų santykis lygus atstumų nuo kūgio viršūnės iki tų plokštumų kvadratų santykiui.

558. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios lankas α. Kūgio aukštinė 4 cm, pagrindo spindulys 3 cm. Raskite α.

559. Kūgio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Raskite skritulio išpjovos, kuri yra kūgio šoninio paviršiaus išklotinė, lanką.

560. Raskite kūgio ašinio pjūvio viršūnės kampą, kai jo šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios lankas lygus: a) 180°; b) 90°; c) 60°.

561. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios spindulys 9 cm, o ją ribojantis lankas lygus 120°. Apskaičiuokite kūgio pagrindo plotą ir aukštinę.

562. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir ašies lygus 45°, sudaromoji 6,5 cm. Apskaičiuokite kūgio šoninio paviršiaus plotą.

563. Kūgio ašinio pjūvio plotas lygus 0,6 cm^2. Kūgio aukštinė 1,2 cm. Apskaičiuokite kūgio paviršiaus plotą.

564. Kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu φ. Į kūgio pagrindą įbrėžtas trikampis, kurio viena kraštinė a, o prieš ją esantis kampas lygus α. Raskite kūgio paviršiaus plotą.

565. Stačiojo trikampio statiniai 6 cm ir 8 cm. Šis trikampis apsuktas apie tiesę, kurioje yra mažesnysis statinis. Apskaičiuokite gauto kūgio šoninio paviršiaus ir paviršiaus plotą.

566. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi m, o kampas prie pagrindo φ. Šis trikampis apsuktas apie tiesę, kurioje yra jo pagrindas. Raskite gauto sukimosi kūno paviršiaus plotą.

567. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs 3 cm ir 6 cm, aukštinė lygi 4 cm. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio sudaromąją.

568. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai 5 cm ir 11 cm, sudaromoji 10 cm. Apskaičiuokite: a) nupjautinio kūgio aukštinę; b) ašinio pjūvio plotą.

569. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai lygūs R ir r ($R > r$), o sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Raskite ašinio pjūvio plotą.

570. Kūgio šoninio paviršiaus plotas 80 cm^2. Per kūgio aukštinės vidurio tašką išvesta plokštuma, statmena aukštinei. Apskaičiuokite gauto nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

571. Trapecijos $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, $BC = 4$ cm, $CD = 3\sqrt{2}$ cm. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio, gauto trapeciją apsukus apie tiesę AB, šoninio paviršiaus ir paviršiaus plotą.

572. Kibiras yra nupjautinio kūgio formos. Jo pagrindų spinduliai 15 cm ir 10 cm, sudaromoji 30 cm. Kiek kilogramų dažų reikia 100 tokių kibirų išorei ir vidui nudažyti, jei 1 m^2 sunaudojama 150 g dažų? (Į kibiro sienelių storį nekreipkite dėmesio.)

9. 780

58. Sfera ir rutulys

Apibrėžimas. *Sferà vadinamas paviršius, sudarytas iš visų erdvės taškų, vienodai nutolusių nuo vieno taško* (150 pav.).

Tas taškas vadinamas *sfèros centrù* (150 paveiksle taškas O), o minėtas atstumas — *sfèros spiñduliu*. Sferos spindulys dažnai žymimas raide R.

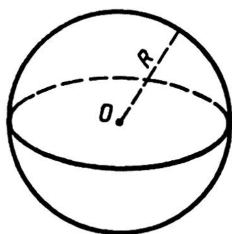
Kiekviena atkarpa, jungianti sferos centrą su kuriuo nors sferos tašku, irgi vadinama sferos spinduliu. Atkarpa, jungianti du sferos taškus ir einanti per jos centrą, vadinama *sfèros skeršmeniu*. Akivaizdu, kad sferos skersmuo lygus $2R$. Pabrėžiame, kad sferą galima gauti pusapskritimį apsukus apie jo skersmenį (151 pav.).

Kūnas, kurį riboja sfera, vadinamas *rùtuliu*. Sferos centras, spindulys ir skersmuo vadinami *rùtulio centrù, spiñduliu ir skeršmeniu*. Akivaizdu, kad rutulį, kurio spindulys R ir centras O, sudaro visi erdvės taškai, kurie nuo taško O nutolę per atstumą, ne didesnį už R (įskaitant ir tašką O). Jokie kiti taškai rutuliui nepriklauso.

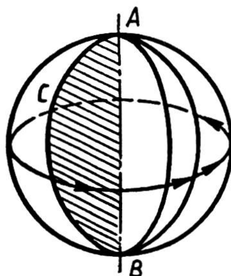
59. Sferos lygtis. Sakykime, turime stačiakampę koordinačių sistemą $Oxyz$ ir kurį nors paviršių F, pavyzdžiui, plokštumą arba sferą. *Paviršiaus F lygtimi* vadinama lygtis su trimis kintamaisiais x, y, z, kurią tenkina paviršiaus F kiekvieno taško koordinatės ir kurios netenkina jokio taško, nesančio tame paviršiuje, koordinatės. Pabrėžiame, kad paviršiaus lygties sąvoka atitinka kreivės lygties sąvoką, aptartą planimetrijos kurse.

Sudarysime sferos, kurios spindulys R ir centras C $(x_0; y_0; z_0)$ (152 pav.), lygtį.

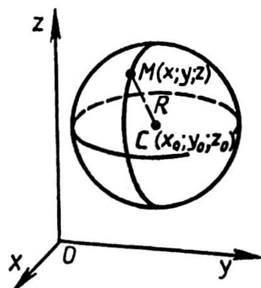
Atstumas nuo bet kurio taško M $(x; y; z)$ iki taško C išreiškiamas formule $MC = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Jei taškas M priklauso nag-



150 pav.



151 pav. Sfera, gauta pusapskritimį *ABC* apsukus apie skersmenį *AB*.



152 pav.

rinėjamai sferai, tai $MC = R$, arba $MC^2 = R^2$, taigi taško M koordinatės tenkina lygtį

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Jei taškas M (x; y; z) nepriklauso nagrinėjamai sferai, tai $MC^2 \neq R^2$, t. y. taško M koordinatės (1) lygties netenkina. Vadinasi, *stačiakampėje koordinačių sistemoje sferos, kurios spindulys R ir centras C (x_0; y_0; z_0), lygtis yra $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.*

60. Sferos ir plokštumos tarpusavio padėtis. Išnagrinėsime, kokia yra sferos ir plokštumos tarpusavio padėtis, atsižvelgdami į sferos spindulį ir atstumą nuo sferos centro iki plokštumos.

Sferos spindulį pažymėkime raide R, o atstumą nuo jos centro iki plokštumos α — raide d. Pasirinkime koordinačių sistemą, kaip parodyta 153 paveiksle: plokštuma Oxy sutampa su plokštuma α, o sferos centras C yra teigiamajame pusašyje Oz. Toje koordinačių sistemoje taško C koordinatės yra (0; 0; d), o sferos lygtis $x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2$. Plokštuma α sutampa su koordinačių plokštuma Oxy, todėl jos lygtis yra $z = 0$ (paaiškinkite kodėl).

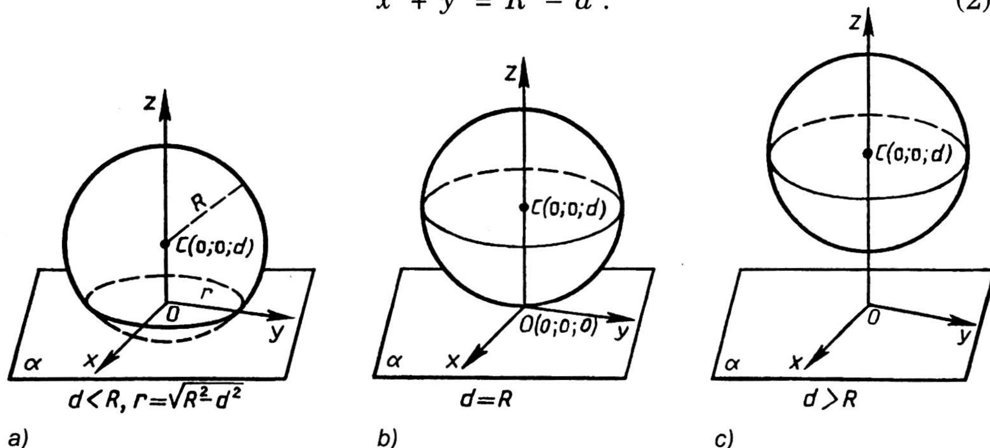
Jei kurio nors taško M (x; y; z) koordinatės tenkina abi lygtis, tai taškas M yra ir plokštumoje α, ir sferoje. Kitaip sakant, jis yra plokštumos ir sferos bendras taškas. Jei tų dviejų lygčių sistema neturi sprendinių, tai sfera ir plokštuma neturi bendrų taškų. Taigi sferos ir plokštumos tarpusavio padėties nagrinėjimas pakeičiamas lygčių sistemos

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2 \end{cases}$$

tyrimu.

Į antrąją lygtį įrašę $z = 0$, gauname:

$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2. \qquad (2)$$



153 pav.

Galimi trys atvejai.

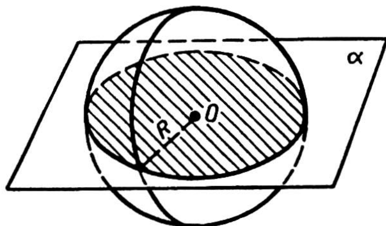
1) $d < R$. Tada $R^2 - d^2 > 0$, o (2) lygtis yra apskritimo, kurio spindulys $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ir centras O plokštumoje Oxy, lygtis. To apskritimo kiekvieno taško M (x; y; 0) koordinatės tenkina ir plokštumos α lygtį, ir sferos lygtį. Kitaip sakant, visi to apskritimo taškai yra plokštumos ir sferos bendri taškai (153 pav., *a*). Šiuo atveju sfera ir plokštuma susikerta apskritimu. Taigi *kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos mažesnis už sferos spindulį, sferos ir plokštumos sankirta yra apskritimas.*

Aišku, kad *rutulio ir plokštumos sankirta yra skritulys*. Jei kertamoji plokštuma eina per rutulio centrą, tai $d = 0$, o sankirta yra skritulys, kurio spindulys R, t. y. skritulys, kurio spindulys lygus rutulio spinduliui. Toks skritulys vadinamas *rùtulio didžiúoju skrìtuliu* (154 pav.). Jei kertamoji plokštuma neina per rutulio centrą, tai $d > 0$ ir pjūvio spindulys $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, aišku, mažesnis už rutulio spindulį (žr. 153 pav., *a*).

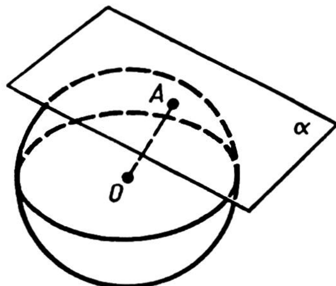
2) $d = R$. Tada $R^2 - d^2 = 0$ ir (2) lygtį tenkina tik reikšmės $x = 0$, $y = 0$. Vadinasi, tik taško O (0; 0; 0) koordinatės tenkina abi lygtis, taigi O — vienintelis bendras sferos ir plokštumos taškas (žr. 153 pav., *b*). Taigi, *kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos lygus sferos spinduliui, sfera ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką.*

3) $d > R$. Tada $R^2 - d^2 < 0$ ir (2) lygties netenkina jokio taško koordinatės. Vadinasi, *kai atstumas nuo sferos centro iki plokštumos didesnis už sferos spindulį, sfera ir plokštuma neturi bendrų taškų* (žr. 153 pav., *c*).

61. Sferos liečiamoji plokštuma. Smulkiau išnagrinėkime atvejį, kai sfera ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką. Plokštuma, kuri su sfera turi tik vieną bendrą tašką, vadinama *sfèros liečiamąja plókštuma*, o jų bendras taškas — plokštumos ir sferos *lietìmosi taškù*. 155 paveiksle plokštuma α — sferos, kurios centras O, liečiamoji plokštuma, A — lietimosi taškas. Sferos liečiamajai plokštumai būdinga savybė, panaši į apskritimo liestinės savybę. Ją nusako ši teorema.



154 pav.



155 pav.

T e o r e m a. ***Sferos spindulys, išvestas į sferos ir plokštumos lietimosi tašką, statmenas liečiamajai plokštumai.***

Į r o d y m a s. Sakykime, plokštuma α taške A liečia sferą, kurios centras O (žr. 155 pav.). Įrodysime, kad $OA \perp \alpha$.

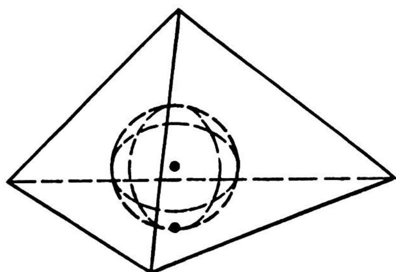
Tarkime, kad taip nėra. Tada spindulys OA yra pasviroji plokštumai α, todėl atstumas nuo sferos centro iki plokštumos α mažesnis už sferos spindulį. Iš to išeina, kad sferos ir plokštumos sankirta yra apskritimas. Tačiau tai prieštarauja teiginiui, kad plokštuma α — liečiamoji plokštuma. Taigi sfera ir plokštuma α turi tik vieną bendrą tašką. Gautoji prieštara įrodo, kad $OA \perp \alpha$. Teorema įrodyta.

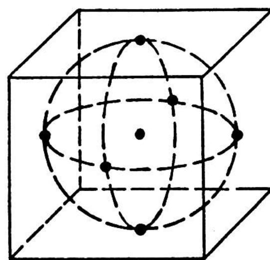
Įrodysime atvirkštinę teoremą.

T e o r e m a. ***Jei sferos spindulys statmenas plokštumai, einančiai per spindulio galą, priklausantį sferai, tai ta plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma.***

Į r o d y m a s. Iš teoremos sąlygos išplaukia, kad nagrinėjamas spindulys yra statmuo, nuleistas iš sferos centro į tą plokštumą. Tada atstumas nuo sferos centro iki plokštumos lygus sferos spinduliui. Vadinasi, sfera ir plokštuma turi tik vieną bendrą tašką. Todėl ta plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma. Teorema įrodyta.

62. Sferos plotas. Apskaičiuodami ritinio ir kūgio šoninių paviršių plotus, pasitelkėme jų išklotines. Sferos negalima iškloti plokštumoje, todėl toks jos ploto apibrėžimo ir apskaičiavimo būdas netinka. Šiam tikslui parankiausi yra apibrėžtiniai briaunainiai, kuriais ir remsimės. *Apibrėžtu apiẽ sfèrą* (rutulį) *briaunainiù* vadinamas briaunainis, kurio visas sienas* liečia sfera. Tokia sfera vadinama *įbrėžtà į̃ briaunaĩnį*. 156 paveiksle pavaizduoti apie sferą apibrėžtas tetraedras ir kubas.





156 pav.

* Sakoma, kad sfera liečia briaunainio sieną, kai sienos plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma, o lietimosi taškas — sienos taškas.

Sakykime, apie sferą apibrėžtas briaunainis turi n sienų. Skaičių n neribotai didinsime, kad apibrėžtųjų briaunainių kiekvienos sienos didžiausias matmuo* artėtų prie nulio. *Sferos plótu laikysime apie sferą apibrėžtų briaunainių paviršiaus plotų sekų ribą, kai jų kiekvienos sienos didžiausias matmuo artėja prie nulio.* 73 skyrelyje įrodysime, kad ta riba yra, ir išvesime šią sferos, kurios spindulys R, ploto apskaičiavimo formulę:

$$S = 4\pi R^2.$$

Uždaviniai

573. Taškai A ir B — sferos taškai, O — jos centras, $O \notin AB$, o taškas M yra atkarpoje AB. Įrodykite, kad: a) jei M — atkarpos AB vidurio taškas, tai $OM \perp AB$; b) jei $OM \perp AB$, tai M — atkarpos AB vidurio taškas.

574. Atkarpos AB galai yra sferos, kurios spindulys R ir centras O, taškai. Taškas M — atkarpos AB vidurys. Raskite: a) OM, kai $R = 50$ cm, $AB = 40$ cm; b) OM, kai $R = 15$ mm, $AB = 18$ mm; c) AB, kai $R = 10$ dm, $OM = 60$ cm; d) AM, kai $R = a$, $OM = b$.

575. A ir B yra sferos, kurios spindulys R, taškai. Raskite atstumą nuo sferos centro iki tiesės AB, kai $AB = m$.

576. Sferos spindulys R, centras A. Parašykite sferos lygtį, kai: a) A (2; –4; 7), $R = 3$; b) A (0; 0; 0), $R = \sqrt{2}$; c) A (2; 0; 0), $R = 4$.

577. Sferos centras yra A, ji eina per tašką N. Parašykite sferos lygtį, kai: a) A (–2; 2; 0), N (5; 0; –1); b) A (–2; 2; 0), N (0; 0; 0); c) A (0; 0; 0), N (5; 3; 1).

578. Raskite sferos centro koordinates ir sferos spindulį, kai sferos lygtis: a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; b) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$.

579. Įrodykite, kad kiekviena šių lygčių yra sferos lygtis: a) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$; c) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$; d) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2{,}5$. Raskite tos sferos centro koordinates ir spindulį.

580. Rutulį, kurio spindulys 41 dm, kerta plokštuma, nutolusi per 9 dm nuo centro. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

581. Trikampio ABC viršūnės yra sferos, kurios spindulys 13 cm, taškai. Raskite atstumą nuo sferos centro iki trikampio plokštumos, kai $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 10$ cm.

---

* Sienos didžiausiu matmeniu vadinsime didžiausią atstumą tarp dviejų sienos taškų. Pavyzdžiui, jei siena yra stačiakampis, tai jos didžiausias matmuo yra įstrižainė.

582. Stačiakampio viršūnės yra sferos, kurios spindulys 10 cm, taškai. Apskaičiuokite atstumą nuo sferos centro iki stačiakampio plokštumos, kai stačiakampio įstrižainė lygi 16 cm.

583. Trikampio kraštinės liečia sferą, kurios spindulys 5 cm. Raskite atstumą nuo sferos centro iki trikampio plokštumos, kai jo kraštinės lygios 10 cm, 10 cm ir 12 cm.

584. Visos trikampio ABC kraštinės liečia sferą, kurios spindulys 5 cm. Apskaičiuokite atstumą nuo sferos centro iki trikampio plokštumos, kai $AB = 13$ cm, $BC = 14$ cm, $CA = 15$ cm.

585. Rombo įstrižainės 15 cm ir 20 cm. Visos rombo kraštinės liečia sferą, kurios spindulys 10 cm. Raskite atkarpą nuo sferos centro iki rombo plokštumos.

586. Atkarpa OH — tetraedro $OABC$ aukštinė. Sferos centras O, spindulys R. Kokia sferos ir plokštumos ABC tarpusavio padėtis, kai: a) $R = 6$ dm, $OH = 60$ cm; b) $R = 3$ m. $OH = 95$ cm; c) $R = 5$ dm, $OA = 45$ cm; d) $R = 3{,}5$ dm, $OH = 40$ cm?

587. Rutulio spindulys R. Atstumas nuo rutulio centro iki kertamosios plokštumos lygus d. Apskaičiuokite: a) pjūvio plotą S, kai $R = 12$ cm, $d = 8$ cm; b) R, kai pjūvio plotas lygus 12 cm^2, $d = 2$ cm.

588. Taškas sferos spindulį dalija pusiau. Per tą tašką išvesta tam spinduliui statmena plokštuma. Sferos spindulys lygus R. Raskite: a) gauto pjūvio spindulį; b) kūgio, kurio viršūnė yra sferos centras, o pagrindas — gautas pjūvis, šoninio paviršiaus plotą.

589. Sferos spindulys lygus R. Ją kertanti plokštuma eina per sferos skersmens galą ir su skersmeniu sudaro kampą α. Raskite pjūvio apskritimo ilgį, kai: a) $R = 2$ cm, $\alpha = 30^\circ$; b) $R = 5$ m, $\alpha = 45^\circ$.

590. Rutulį ribojančios sferos spindulys R. Per sferos tašką išvestos dvi plokštumos, kurių viena yra sferos liečiamoji plokštuma, o kita į liečiamąją plokštumą pasvirusi kampu φ. Raskite nagrinėjamo rutulio pjūvio plotą.

591. Sfera liečia 120° dvisienio kampo sienas. Raskite sferos spindulį ir atstumą tarp lietimosi taškų, kai atstumas nuo sferos centro iki dvisienio kampo briaunos lygus a.

592. Sferos spindulys lygus 112 cm. Sferos liečiamosios plokštumos taškas nuo lietimosi taško nutolęs per 15 cm. Raskite atstumą nuo to taško iki jam artimiausio sferos taško.

593. Apskaičiuokite sferos plotą, kai sferos spindulys lygus: a) 6 cm; b) 2 dm; c) $\sqrt{2}$ m; d) $2\sqrt{3}$ cm.

594. Plokštuma eina per sferos centrą, sferos pjūvio plotas lygus 9 m^2. Raskite sferos plotą.

595. Sferos plotas lygus 324 cm^2. Raskite sferos spindulį.

596. Taikydami sferos ploto formulę, įrodykite, kad dviejų sferų plotai proporcingi jų spindulių kvadratams.

597. Skritulio plotas lygus sferos, kurios spindulys 5 cm, plotui. Apskaičiuokite skritulio spindulį.

598. Dviejų lygiagrečių sferos pjūvių spinduliai 9 cm ir 12 cm. Atstumas tarp kertamųjų plokštumų lygus 3 cm. Apskaičiuokite sferos plotą.

599. Sferos pjūvių, gautų perkirtus ją dviem statmenomis plokštumomis, spinduliai lygūs r_1 ir r_2. Tie pjūviai turi vienintelį bendrą tašką. Raskite sferos plotą.

600. Taikydami sferos ploto formulę, įrodykite, kad ritinio, gauto kvadratą apsukus apie jo kraštinę, paviršiaus plotas yra lygus sferos, kurios spindulys lygus kvadrato kraštinei, plotui.

VI SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Koks kampas tarp ritinio pagrindo plokštumos ir per ritinio sudaromąją einančios plokštumos?
2. Kas yra ritinio pjūvis, gautas perkirtus jį plokštuma, lygiagrečia su ritinio sudaromąja?
3. Ritinio pagrinduose parinktos dvi nelygiagrečios stygos. Ar trumpiausias atstumas tarp tų stygų taškų gali būti: a) lygus ritinio aukštinei; b) didesnis už ritinio aukštinę; c) mažesnis už ritinio aukštinę?
4. Dvi ritinio formos detalės padengiamos vienodo storio nikelio sluoksniu. Pirmos detalės aukštis du kartus didesnis už antrosios aukštį, o pagrindo spindulys du kartus mažesnis už antrosios pagrindo spindulį. Katrai detalei reikės daugiau nikelio?
5. Ar lygūs vienas kitam kampai tarp kūgio sudaromųjų ir: a) pagrindo plokštumos; b) kūgio ašies?
6. Kas yra kūgio pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma, einančia per kūgio viršūnę.
7. A ir B — rutulio taškai. Ar rutuliui priklauso dar kuris nors atkarpos AB taškas?
8. Stačiojo trikampio statiniai 4 cm ir $2\sqrt{2}$ cm. Ar visos to stačiojo trikampio viršūnės gali priklausyti sferai, kurios spindulys $\sqrt{5}$ cm?
9. Ar dvi sferos, kurių bendras centras ir nelygūs spinduliai, gali turėti bendrą liečiamąją plokštumą?
10. Kas yra visų erdvės taškų, iš kurių turima atkarpa matoma stačiu kampu, aibė?

Papildomi uždaviniai

601. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus S. Ritinį perkirskite plokštuma, einančia per pagrindo spindulio vidurio tašką ir statmena tam spinduliui. Raskite pjūvio plotą.

602. Stačiakampio $ABCD$ viršūnės A ir B priklauso ritinio vieno pagrindo apskritimui, o viršūnės C ir D — kito pagrindo apskritimui. Ritinio sudaromoji lygi a, $AB = a$, kampas tarp tiesės BC ir pagrindo plokštumos lygus 60°. Raskite ritinio spindulį.

603. Įrodykite šį teiginį: jei plokštuma lygiagreti su ritinio ašimi ir atstumas tarp tos plokštumos ir ritinio ašies lygus ritinio spinduliui, tai ritinys ir plokštuma turi bendrą sudaromąją, tačiau tik vieną. (Tokia plokštuma vadinama *ritinio liečiamąja plokštuma.*)

604. Stačiakampį apsukus apie nelygias kraštines gauti ritiniai, kurių paviršių plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite stačiakampio įstrižainę.

605. Raskite ritinio paviršiaus ploto ir jo šoninio paviršiaus ploto santykį, kai ritinio ašinis pjūvis yra: a) kvadratas; b) stačiakampis $ABCD$, kurio $AB : AD = 1 : 2$.

606. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus apie jo ašinį pjūvį apibrėžto skritulio plotui. Raskite ritinio spindulio ir aukštinės santykį.

607. Ritinio ašinio pjūvio perimetras lygus $2p$. Raskite ritinio spindulį ir aukštinę, kai ritinio šoninio paviršiaus plotas didžiausias.

608. Ritinio formos stiklinės sienelės ir dugno storis lygus 1 cm, stiklinės aukštis 16 cm, o vidinis spindulys 5 cm. Apskaičiuokite stiklinės paviršiaus plotą.

609. Sulenktas skritulio ketvirtadalis sudaro kūginį paviršių. Įrodykite, kad kūgio sudaromoji keturis kartus didesnė už pagrindo spindulį.

610. Kūgio šoninis paviršius turi tris paporiui statmenas sudaromąsias. Raskite kūgio ašinio pjūvio kampo prie viršūnės kosinusą.

611. Kūgio pagrindo plotas lygus S_1, o šoninio paviršiaus plotas — S_0. Raskite kūgio ašinio pjūvio plotą.

612. Kūgio šoninio paviršiaus ir kūgio paviršiaus plotų santykis lygus $\frac{7}{8}$. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo plokštumos.

613. Per kūgio viršūnę ir pagrindo stygą, jungiančią 120° lanko galus, išvestas kūgio pjūvis. Jo plokštuma su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Kūgio pagrindo spindulys lygus 4 cm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

614. Kūgio šoninio paviršiaus išklotinė yra skritulio išpjova, kurios lankas 270°. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir aukštinės.

615. Statusis trikampis, kurio statiniai a ir b, apsuktas apie įžambinę. Raskite gauto kūno paviršiaus plotą.

616. Lygiašonė trapecija, kurios pagrindai 6 cm ir 10 cm, o smailusis kampas 60°, apsukta apie ilgesnįjį pagrindą. Apskaičiuokite gauto kūno paviršiaus plotą.

617. Kūgio aukštinė 4 cm, o pagrindo spindulys 3 cm. Į kūgį įbrėžta* taisyklingoji n-kampė piramidė. Apskaičiuokite tos piramidės paviršiaus plotą, kai: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

618. Nupjautinio kūgio ašinio pjūvio įstrižainės viena kitai statmenos. Ašinio pjūvio plotas 36 dm^2, vienas jo pagrindas 40 cm. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus ir paviršiaus plotą.

619. Įrodykite, kad: a) sferos centras yra jos simetrijos centras; b) kiekviena tiesė, einanti per sferos centrą, yra sferos simetrijos ašis; c) kiekviena plokštuma, einanti per sferos centrą, yra sferos simetrijos plokštuma.

620. Stačiojo trikampio viršūnės yra sferoje. Jo statiniai 1,8 cm ir 2,4 cm. a) Sferos spindulys 1,5 cm. Įrodykite, kad sferos centras yra trikampio plokštumoje. b) Sferos spindulys 6,5 cm. Raskite atstumą nuo sferos centro iki trikampio plokštumos.

621. Sferos spindulys lygus R. Atstumas nuo sferos centro iki tiesės — d. Įrodykite, kad: a) jei $d < R$, tai tiesė sferą kerta dviejuose taškuose; b) jei $d = R$, tai tiesė ir sfera turi tik vieną bendrą tašką; c) jei $d >$ $> R$, tai tiesė ir sfera neturi nė vieno bendro taško.

622. Sferos lygtis $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 5)^2 = 25$. Raskite sferos ir koordinačių ašių susikirtimo taškų koordinates.

623. Sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ kerta plokštuma, einanti per tašką M (2; 4; 5) ir statmena abscisių ašiai. Apskaičiuokite pjūvio apskritimo spindulį.

624. Du stačiakampiai yra skirtingose plokštumose ir turi bendrą kraštinę. Įrodykite, kad visos tų stačiakampių viršūnės priklauso vienai sferai.

625. Atstumas tarp dviejų lygių sferų centrų mažesnis už jų skersmenį. a) Įrodykite, kad tų sferų sankirta yra apskritimas. b) Raskite to apskritimo spindulį, kai sferų spinduliai lygūs R, o atstumas tarp jų centrų lygus $1{,}6R$.

626. Taškai A, B, C ir D priklauso sferai, kurios spindulys R, be to, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 2\varphi$, $AD = BD = CD$. Raskite: a) AB ir AD; b) sferos ir plokštumos ABC sankirtos plotą.

627. Sferos spindulys lygus 10 cm. Šalia sferos pasirinktas taškas M. Jo atstumas iki artimiausio sferos taško lygus 16 cm. Raskite sferos apskritimo, kurio visi taškai nuo taško M nutolę per 24 cm, ilgį.

---

* *Į kūgį įbrėžta piramide* vadinama piramidė, kurios pagrindas įbrėžtas į kūgio pagrindą, o viršūnė sutampa su kūgio viršūne.

628. Kūną riboja dvi sferos, turinčios bendrą centrą. Įrodykite, kad kūno pjūvio, gauto perkirtus jį plokštuma, einančia per sferų centrą, plotas yra lygus pjūvio, gauto perkirtus jį vidinės sferos liečiamąja plokštuma, plotui.

Įvairūs briaunainių, ritinio, kūgio ir rutulio uždaviniai

Priminsime kai kuriuos terminus, kuriuos vartosime šio skyriaus uždaviniuose. Briaunainis, kurio visas sienas liečia sfera, vadinamas *apibrėžtu apie sferą*. Tada sfera vadinama *įbrėžta į briaunainį*. Briaunainis, kurio visos viršūnės priklauso sferai, vadinamas *įbrėžtu į sferą*. Tada sfera vadinama *apibrėžta apie briaunainį*.

629. Jei į ritinį įbrėžtos trikampės prizmės* viena siena eina per ritinio ašį, tai kitos dvi sienos viena kitai statmenos. Įrodykite.

630. Į kūgį, kurio aukštinė lygi 12 cm, įbrėžta piramidė. Jos pagrindas — stačiakampis, kurio kraštinės 6 cm ir 8 cm. Raskite piramidės ir kūgio paviršių plotų santykį.

631. Į nupjautinį kūgį įbrėžta taisyklingoji nupjautinė n-kampė piramidė (t. y. piramidės pagrindai įbrėžti į nupjautinio kūgio pagrindus). Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai 2 cm ir 5 cm, o aukštinė lygi 4 cm. Apskaičiuokite piramidės plotą, kai: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$.

632. Įrodykite šį teiginį: jei į taisyklingąją prizmę galima įbrėžti sferą, tai sferos centras yra prizmės pagrindų centrus jungiančios atkarpos vidurio taškas.

633. Įrodykite, kad į taisyklingąją piramidę įbrėžtos sferos centras yra tos piramidės aukštinėje.

634. Sferos spindulys lygus R. Apie sferą apibrėžtas briaunainis. Raskite to briaunainio paviršiaus plotą, kai tas briaunainis yra: a) kubas; b) taisyklingoji šešiakampė prizmė; c) taisyklingasis tetraedras.

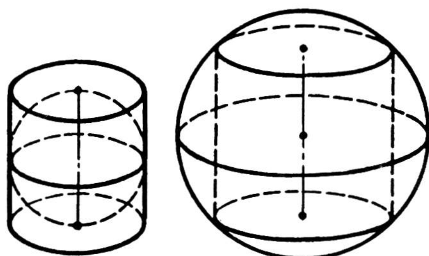
635. Apie sferą, kurios spindulys R, apibrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė. Plokščiasis kampas prie jos viršūnės lygus α. a) Raskite piramidės šoninio paviršiaus plotą. b) Apskaičiuokite tą plotą, kai $R = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$.

636. Įrodykite, kad jei į taisyklingąją nupjautinę keturkampę piramidę galima įbrėžti sferą, tai piramidės apotema lygi jos šoninės sienos pagrindų pussumei.

637. Įrodykite, kad: a) apie taisyklingąją prizmę apibrėžtos sferos centras yra tos prizmės pagrindų centrus jungiančios atkarpos vidurio taškas; b) apie taisyklingąją piramidę apibrėžtos sferos centras yra tos piramidės aukštinėje arba jos tęsinyje.

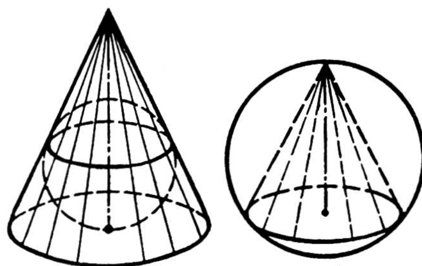
---

* *Į ritinį įbrėžta prizme* vadinama prizmė, kurios pagrindai įbrėžti į ritinio pagrindus.



a) b)

157 pav.



a) b)

158 pav.

638. Įrodykite, kad: a) apie kiekvieną tetraedrą galima apibrėžti sferą; b) į kiekvieną tetraedrą galima įbrėžti sferą.

639. Sferos spindulys lygus R. Raskite šių į sferą įbrėžtų briaunainių paviršių plotus: a) kubo; b) taisyklingosios šešiakampės prizmės, kurios aukštinė lygi R; c) taisyklingojo tetraedro.

640. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna $2a$. Raskite į piramidę įbrėžtos ir apie piramidę apibrėžtos sferų spindulius.

641. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžtos ir apie ją apibrėžtos sferų spinduliai lygūs 2 cm ir 5 cm. Raskite piramidės pagrindo kraštinę ir aukštinę.

642. Sfera įbrėžta į ritinį (t. y. ji liečia ritinio pagrindus ir kiekvieną sudaromąją; 157 pav., *a*). Raskite sferos ploto ir ritinio paviršiaus ploto santykį.

643. Kūgio pagrindo spindulys lygus r, kūgio ašinio pjūvio kampas prie viršūnės — φ. Į kūgį įbrėžta sfera, kurios spindulys R (t. y. sfera liečia kūgio pagrindą ir kiekvieną jo sudaromąją; 158 pav., *a*). Raskite: a) r, kai žinomi R ir φ; b) R, kai žinomi r ir φ; c) φ, kai $R = 1$ cm, $r = \sqrt{3}$ cm.

644. Į kūgį įbrėžta sfera, kurios spindulys r. Kampas tarp kūgio sudaromosios ir pagrindo lygus α. Raskite kūgio paviršiaus plotą.

645. Į sferą įbrėžtas ritinys (t. y. ritinio pagrindai yra sferos pjūviai; 157 pav., *b*). Raskite ritinio paviršiaus ploto ir sferos ploto santykį, kai ritinio aukštinė lygi pagrindo skersmeniui.

646. Kūgis, kurio ašinio pjūvio viršūnės kampas φ, o pagrindo spindulys r, įbrėžtas į sferą, kurios spindulys R (t. y. kūgio viršūnė yra sferos taškas, o kūgio pagrindas — sferos pjūvis; 158 pav., *b*). Raskite: a) r, kai žinomi R ir φ; b) R, kai žinomi r ir φ; c) φ, kai $R = 2r$.

VII SKYRIUS

KŪNŲ TŪRIAI

§ 1. STAČIAKAMPIO GRETASIENIO TŪRIS

63. Tūrio sąvoka. Kūno tūrio sąvoka nusakoma panašiai kaip plokščiosios figūros ploto sąvoka. Iš planimetrijos kurso žinoma, kad kiekvienas daugiakampis turi plotą, kuris išreiškiamas pasirinktu plotų matavimo vienetu. Plotų matavimo vienetu paprastai pasirenkamas kvadratas, kurio kraštinė lygi atkarpų matavimo vienetui.

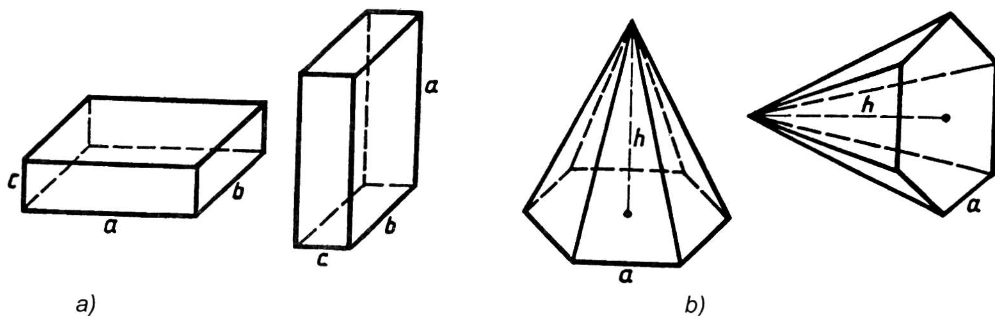
Laikysime, kad kiekvienas nagrinėjamas kūnas turi tūrį, kurį galima išmatuoti tūrių matavimo vienetu. Juo pasirinksime kubą, kurio briauna lygi atkarpų matavimo vienetui. Kubas, kurio briauna lygi 1 cm, vadinamas *kùbiniu centimetrù* ir žymimas cm^3.

Panašiai apibrėžiamas *kùbinis mètras* (m^3), *kùbinis milimètras* (mm^3) ir t. t. Tūrių matavimas panašus į plotų matavimą. Pasirinkus tūrių matavimo vienetą, kiekvieno kūno tūris išreiškiamas teigiamuoju skaičiumi, kuris rodo, kiek matavimo vienetų ir jo dalių išsitenka tame kūne. Aišku, kad skaičius, išreiškiantis kūno tūrį, priklauso nuo tūrių matavimo vieneto pasirinkimo, todėl po to skaičiaus nurodomas jo pavadinimas. Pavyzdžiui, jei tūrių matavimo vienetu pasirinktas cm^3 ir kurio nors kūno tūris V lygus 2, tai rašoma $V = 2\ cm^3$.

Jei du kūnai lygūs, tai kiekviename jų yra tiek pat tūrio matavimo vienetų ir jų dalių, vadinasi, teisinga ši tūrių savybė.

1°. *Lygių kūnų tūriai yra lygūs.*

P a s t a b a. Dviejų figūrų, skyrium imant, dviejų kūnų lygumas stereometrijoje apibrėžiamas taip pat, kaip ir planimetrijoje: kūnai, kuriuos galima sutapdinti uždedant vieną ant kito, vadinami lygiais. Pavyzdžiui, lygūs kūnai yra du stačiakampiai gretasieniai, kurių matmenys lygūs (159 pav., *a*), dvi stačiosios prizmės, kurių pagrindai lygūs ir aukštinės lygios, dvi taisyklingosios piramidės, kurių pagrindų kraštinės ir



159 pav.

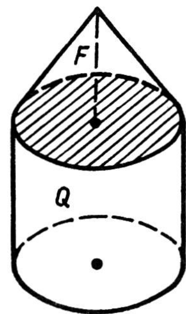
aukštinės lygios (159 pav., *b*). Kiekvienu nurodytu atveju dviejų kūnų lygumą galima įrodyti remiantis figūrų uždėjimo ir lygumo aksiomomis (žr. 2 priedą).

Išnagrinėsime dar vieną tūrių savybę. Sakykime, kūną sudaro keletas kūnų. Čia laikome, kad bet kurie du kūnai neturi bendrų vidaus taškų, bet gali turėti bendrus krašto taškus (žr. 160 paveikslą, kuriame ritinys Q ir kūgis F turi bendrus krašto taškus; tai jų bendro pagrindo taškai). Aišku, sudėjus kūną sudarančių kūnų tūrius, gaunamas viso kūno tūris. Tai išreikšime šia savybe.

2°. *Kūno, sudaryto iš kelių kūnų, tūris lygus tų kūnų tūrių sumai.*

1° ir 2° savybės vadinamos *pagrindinėmis tūrių savybėmis*. Primename, kad panašios savybės būdingos atkarpų ilgiams ir daugiakampių plotams. Remdamiesi šiomis savybėmis, išvesime formules gretasienio, prizmės, piramidės, ritinio, kūgio, rutulio tūriams apskaičiuoti.

Iš pradžių pabrėžiame vieną 1° ir 2° savybių išvadą. Nagrinėkime kubą, kurį pasirinkome tūrių matavimo vienetu. Jo briauna lygi atkarpų matavimo vienetui. Kiekvieną to kubo briauną padalykime į n lygių dalių (n — bet kuris sveikasis skaičius) ir per dalijimo taškus išveskime atitinkamai briaunai statmenas plokštumas. Kubą padalysime į n^3 lygių mažesnių kubų, kurių kiekvieno briauna $\frac{1}{n}$. Kadangi visų mažesniųjų kubų tūrių suma lygi viso kubo tūriui (2° savybė), t. y. 1 (vienetui), tai kiekvieno mažesniojo kubo tūris lygus $\frac{1}{n^3}$ (1° savybė — visų mažesniųjų kubų tūriai lygūs). Taigi *kubo, kurio briauna* $\frac{1}{n}$, *tūris lygus* $\frac{1}{n^3}$. Šia savybe teks remtis kitame skyrelyje išvedant stačiakampio gretasienio tūrio formulę.



160 pav.

64. Stačiakampio gretasienio tūris

Teorema. ***Stačiakampio gretasienio tūris lygus jo trijų matmenų sandaugai.***

Įrodymas*. Stačiakampio gretasienio P matmenis pažymėkime a, b, c, jo tūrį — raide V. Įrodysime, kad $V = abc$.

Galimi du atvejai.

1. Matmenys a, b, c yra baigtinės dešimtainės trupmenos, kurios turi ne daugiau kaip n (galima laikyti, kad $n \geq 1$) ženklų po kablelio. Tokiu atveju skaičiai $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ ir $c \cdot 10^n$ yra sveikieji skaičiai. Kiekvieną gretasienio briauną padalykime į lygias dalis, kurių kiekvienos ilgis $\frac{1}{10^n}$, ir per dalijimo taškus išveskime plokštumas, statmenas toms briaunoms. Gretasienį P padalysime į $abc \cdot 10^{3n}$ lygių kubų, kurių kiekvieno briauna $\frac{1}{10^n}$. Kadangi kiekvieno tokio kubo tūris lygus $\frac{1}{10^{3n}}$ (žr. 63 skyrelį), tai gretasienio P tūris lygus $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Taigi $V = abc$.

2. Bent vienas iš matmenų a, b ir c yra begalinė dešimtainė trupmena. Nagrinėkime baigtines dešimtaines trupmenas a_n, b_n, c_n, kurios gaunamos nubraukus skaičių a, b, c visus skaitmenis (pradedant $(n + 1)$-uoju) po kablelio. Akivaizdu, kad $a_n \leq a \leq a'_n$; čia $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$. Sudarykime tokias pačias nelygybes su skaičiais b ir c. Sudauginę tas nelygybes, gauname:

$$a_n b_n c_n \leq abc \leq a'_n b'_n c'_n\,; \tag{1}$$

čia $b'_n = b_n + \frac{1}{10^n}$, $c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}$.

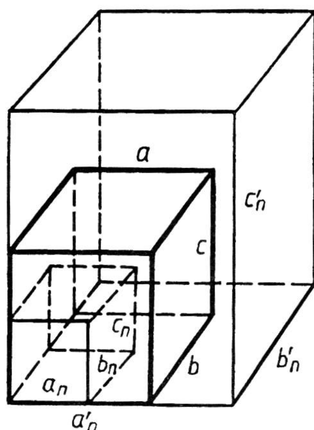
Kaip matyti iš pirmuoju atveju pateikto įrodymo, (1) nelygybės kairioji dalis yra stačiakampio gretasienio P_n, kurio matmenys a_n, b_n, c_n, tūris V_n, o dešinioji dalis — stačiakampio gretasienio P'_n, kurio matmenys a'_n, b'_n, c'_n, tūris V'_n. Kadangi gretasienis P_n yra gretasienyje P, o gretasienis P — gretasienyje P'_n (161 pav.), tai gretasienio P tūris V yra tarp $V_n = a_n b_n c_n$ ir $V'_n = a'_n b'_n c'_n$:

$$a_n b_n c_n \leq V \leq a'_n b'_n c'_n. \tag{2}$$

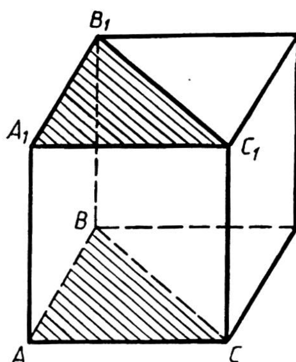
Neribotai didinkime n. Tada skaičius $\frac{1}{10^n}$ kiek norima mažės, o dėl to skaičius $a'_n b'_n c'_n$ kiek norima mažai skirsis nuo skaičiaus $a_n b_n c_n$. Iš to,

---

* Šios teoremos įrodymas neprivalomas.



161 pav.



162 pav.

remiantis (1) ir (2) nelygybėmis, daroma išvada, kad skaičius V kiek norima mažai skiriasi nuo skaičiaus abc. Vadinasi, jie lygūs: $V = abc$. Tai ir reikėjo įrodyti.

1 išvada. *Stačiakampio gretasienio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

Įsitikinsime tuo. Sieną, kurios briaunos a ir b, laikykime pagrindu. Tada pagrindo plotas S lygus ab, o gretasienio aukštinė h lygi c. Vadinasi, $V = abc = Sh$.

2 išvada. *Stačiosios prizmės, kurios pagrindas yra statusis trikampis, tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.*

Šią savybę įrodysime stačiąją trikampę prizmę, kurios pagrindas ABC ir kampas A status, papildę iki stačiakampio gretasienio, kaip parodyta 162 paveiksle. Pagal 1 išvadą šio gretasienio tūris lygus $2S_{ABC} \cdot h$; čia S_{ABC} — trikampio ABC plotas, h — prizmės aukštinė. Plokštuma B_1BC gretasienį dalija į dvi lygias prizmes, kurių viena — pradinė. (Prizmės lygios, nes turi lygius pagrindus ir lygias aukštines.) Vadinasi, pradinės prizmės tūris V lygus pusei gretasienio tūrio:

$$V = \frac{1}{2}(2S_{ABC} \cdot h) = S_{ABC} \cdot h.$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

Uždaviniai

647. Kūną R sudaro kūnai P ir Q, kurių tūriai V_1 ir V_2. Kūno R tūrį V išreikškite tūriais V_1 ir V_2, kai: a) kūnai P ir Q neturi bendrų vidaus taškų; b) kūnai P ir Q turi bendrą dalį, kurios tūris lygus $\frac{1}{3}V_1$.

648. Raskite stačiakampio gretasienio tūrį, kai jo pagrindo kraštinės lygios a ir b, aukštinė h ir:
a) $a = 11$, $b = 12$, $h = 15$; b) $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 10\sqrt{10}$;
c) $a = 18$, $b = 5\sqrt{3}$, $h = 13$; d) $a = 3\frac{1}{3}$, $b = \sqrt{5}$, $h = 0{,}96$.

649. Apskaičiuokite kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tūrį, kai: a) $AC = 12$ cm; b) $AC_1 = 3\sqrt{2}$; c) $DE = 1$ cm; čia E — briaunos AB vidurio taškas.

650. Stačiakampio gretasienio matmenys 8 cm, 12 cm ir 18 cm. Kubo tūris lygus to gretasienio tūriui. Raskite kubo briauną.

651. Stačiakampio gretasienio formos plytos matmenys 25 cm, 12 cm ir 6,5 cm. Plytos tankis lygus 1,8 g/cm^3. Apskaičiuokite jos masę.

652. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tūrį, kai $AC_1 = 13$ cm, $BD = 12$ cm ir $BC_1 = 11$ cm.

653. Stačiakampio gretasienio įstrižainė, lygi 18 cm, su šoninės sienos plokštuma sudaro 30° kampą ir su šonine briauna — 45° kampą. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

654. Stačiakampio gretasienio įstrižainė su šoninės sienos plokštuma sudaro kampą α, o su pagrindo plokštuma — kampą β. Gretasienio aukštinė lygi h. Raskite gretasienio tūrį.

655. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinės lygios a ir b. Gretasienio įstrižainė su šonine siena, kurios kraštinė b, sudaro 30° kampą. Raskite gretasienio tūrį.

656. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė B_1D su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą, o dvisienis kampas A_1B_1BD lygus 60°. Pagrindo įstrižainė lygi 12 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

657. Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tūrį, kai: a) $AC_1 = 1$ m, $\angle C_1AC = 45^\circ$, $\angle C_1AB = 60^\circ$; b) $AC_1 = 24$ cm, $\angle C_1AA_1 = 45^\circ$, AC_1 su šoninės sienos plokštuma sudaro 30° kampą.

658. Apskaičiuokite stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūrį, kai $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 37$ cm, $AB = 35$ cm, $AA_1 = 1{,}1$ dm.

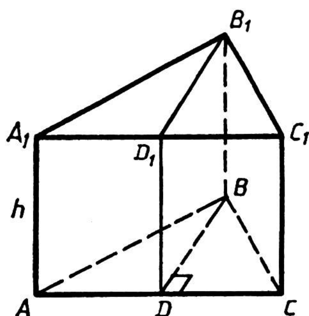
§ 2. STAČIOSIOS PRIZMĖS IR RITINIO TŪRIS

65. Stačiosios prizmės tūris

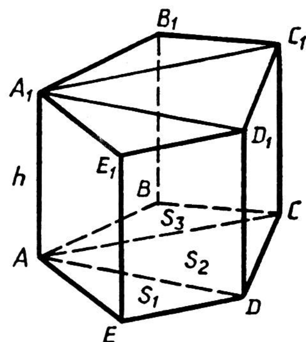
T e o r e m a. ***Stačiosios prizmės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.***

Į r o d y m a s. Pirmiausia teoremą įrodysime nagrinėdami trikampę prizmę, po to — bet kurią kitą.

10. 780



163 pav.



164 pav.

1. Nagrinėkime stačiąją trikampę prizmę $ABCA_1B_1C_1$, kurios tūris V, aukštinė h. Išveskime trikampio ABC aukštinę (163 paveiksle atkarpą BD), ją dalijančią į du trikampius (bent viena trikampio aukštinė tokią sąlygą tenkina). Plokštuma BB_1D dalija prizmę į dvi prizmes, kurių pagrindai yra statieji trikampiai ABD ir BDC. Tų prizmių tūriai V_1 ir V_2 lygūs $S_{ABD} \cdot h$ ir $S_{BDC} \cdot h$. Remdamiesi 2° tūrių savybe, rašome: $V = V_1 + V_2$, arba

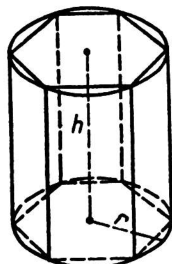
$$V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h.$$

Taigi

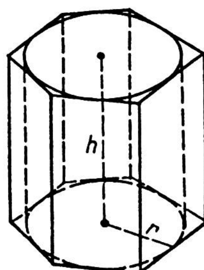
$$V = S_{ABC} \cdot h. \tag{1}$$

2. Dabar teoremą įrodysime bet kurios stačiosios prizmės atveju. Sakykime, tos prizmės aukštinė h, pagrindo plotas S. Tokią prizmę galima padalyti į stačiąsias trikampes prizmes, kurių aukštinė h. Pavyzdžiui, 164 paveiksle pavaizduota penkiakampė prizmė, padalyta į tris stačiąsias trikampes prizmes. Kiekvienos trikampės prizmės tūrį išreiškiame (1) formule ir sudedame tūrius. Iškėlę už skliaustų bendrą dauginamąjį h, skliaustuose gausime trikampių prizmių pagrindų plotų sumą, t. y. pradinės prizmės pagrindo plotą S. Taigi nagrinėjamos prizmės tūris lygus sandaugai $S \cdot h$. Teorema įrodyta.

66. Ritinio tūris. Sakoma, kad *prìzmė*, kurios pagrindai įbrėžti į ritinio pagrindus, yra *įbrėžtà į rìtinį* (165 pav.), ir *prizmė apibrėžtà apiẽ*

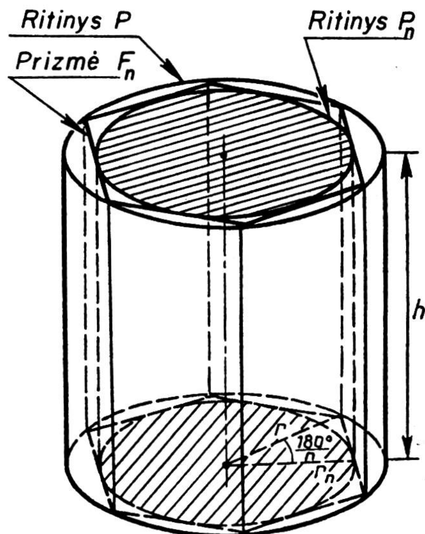


165 pav. Į ritinį įbrėžta prizmė.



166 pav. Apie ritinį apibrėžta prizmė.

rìtinį, kai jos pagrindai apibrėžti apie ritinio pagrindus (166 pav.). Aišku, kad kiekvienos į ritinį įbrėžtos arba apie ritinį apibrėžtos prizmės aukštinė lygi ritinio aukštinei.



167 pav.

> T e o r e m a. ***Ritinio tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.***

Į r o d y m a s. Nagrinėkime ritinį P, kurio pagrindo spindulys r, aukštinė h. Į ritinį P įbrėžkime taisyklingąją n-kampę prizmę F_n (167 pav.), o į tą prizmę — ritinį P_n (167 paveiksle pagrindai subrūkšniuoti). Ritinių P ir P_n tūrius pažymėkime V ir V_n, o ritinio P_n spindulį — r_n. Prizmės F_n tūris lygus $S_n \cdot h$ (S_n — prizmės pagrindo plotas). Kadangi ritinys P_n yra prizmėje F_n, o prizmė F_n — ritinyje P, tai

$$V_n < S_n \cdot h < V. \qquad (1)$$

Neribotai didinkime skaičių n. Tada ritinio P_n spindulys r_n artės prie ritinio P spindulio r ($r_n = r \cos \frac{180°}{n} \to r$, kai $n \to \infty$). Ritinio P_n tūris artės prie ritinio P tūrio: $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$. Iš (1) nelygybių išplaukia, kad ir $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \cdot h = V$. Tačiau $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$. Taigi

$$V = \pi r^2 h. \qquad (2)$$

Ritinio pagrindo plotą πr^2 pažymėję raide S, iš (2) formulės gauname:

$$V = S \cdot h.$$

Teorema įrodyta.

Klausimai ir uždaviniai

659. Apskaičiuokite stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūrį, kai: a) $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm ir didžiausias iš šoninių sienų plotų lygus 35 cm^2; b) $\angle AB_1C = 60°$, $AB_1 = 3$, $CB_1 = 2$ ir dvisienis kampas, kurio briauna BB_1, status.

660. Raskite stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūrį, kai $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ ir $BB_1 = BD$; čia BD — trikampio ABC aukštinė.

661. Raskite stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūrį, kai $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, įstrižainė A_1C lygi l ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą β.

662. Stačiosios prizmės pagrindas yra lygiagretainis. Per pagrindo kraštinę, lygią a, ir prieš ją esančią kito pagrindo kraštinę išvestas pjūvis, kuris su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Pjūvio plotas lygus Q. Raskite prizmės tūrį.

663. Raskite taisyklingosios n-kampės prizmės, kurios kiekviena briauna lygi a, tūrį, kai: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 8$.

664. Per taisyklingosios trikampės prizmės apatinio pagrindo kraštinę ir prieš ją esančio viršutinio pagrindo viršūnę išvestas pjūvis. Su pagrindo plokštuma jis sudaro $60°$ kampą. Prizmės pagrindo kraštinė lygi a. Raskite prizmės tūrį.

665. Taisyklingosios šešiakampės prizmės ilgiausioji įstrižainė lygi 8 cm ir su šonine briauna sudaro $30°$ kampą. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

666. Sakykime, V, r ir h — ritinio tūris, spindulys ir aukštinė. Raskite: a) V, kai $r = 2\sqrt{2}$ cm, $h = 3$ cm; b) r, kai $V = 120$ cm^3, $h = 3{,}6$ cm; c) h, kai $r = h$, $V = 8\pi$ cm^3.

667. 4 mm skersmens aliumininio laido masė 6,8 kg. Raskite laido ilgį (aliuminio tankis 2,6 g/cm^3).

668. Cilindrinės cisternos skersmuo 18 m, aukštis 7 m. Kiek tonų naftos, kurios tankis 0,85 g/cm^3 telpa toje cisternoje?

669. Ritinio pagrindo plotas lygus Q, o ašinio pjūvio plotas S. Raskite ritinio tūrį.

670. Švininio vamzdžio, kurio sienelių storis 4 mm, vidinis skersmuo 13 mm. Švino tankis 11,4 g/cm^3. Kiek sveria 25 m ilgio vamzdis?

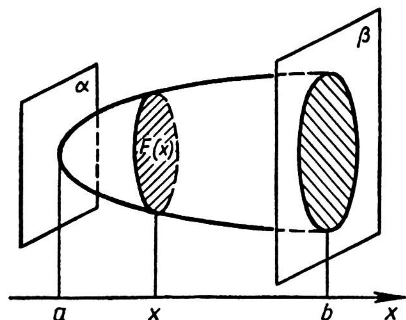
671. Į ritinį įbrėžta taisyklingoji n-kampė prizmė. Raskite prizmės ir ritinio tūrių santykį, kai: a) $n = 3$; b) $n = 4$; c) $n = 6$; d) $n = 8$; e) n — bet kuris sveikasis skaičius.

672. Į ritinį įbrėžta prizmė. Jos pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinis a, o prie jo esantis kampas α. Prizmės aukštinė lygi h. Raskite ritinio tūrį.

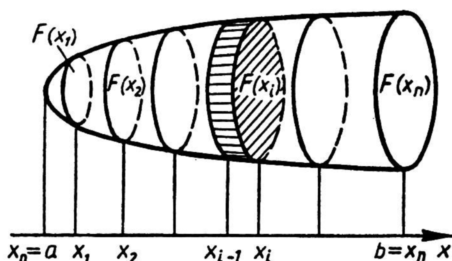
§ 3. PASVIROSIOS PRIZMĖS, PIRAMIDĖS IR KŪGIO TŪRIS

67. Kūnų tūrių apskaičiavimas taikant apibrėžtinį integralą. Išnagrinėsime kūnų tūrių apskaičiavimo būdą, pagrįstą integralo sąvoka (ją žinote iš algebros ir analizės pradmenų kurso).

Sakykime, kūnas T, kurio tūrį reikia apskaičiuoti, yra tarp dviejų lygiagrečių plokštumų α ir β (168 pav.). Pasirinkime koordinačių sistemą,



168 pav.



169 pav.

kurios ašis Ox būtų statmena plokštumoms α ir β. Ašies Ox ir tų plokštumų susikirtimo taškų abscises pažymėkime raidėmis a ir b ($a < b$). Laikysime, jog kūnas, kurio pjūvis $F(x)$, gautas perkirtus jį plokštuma, einančia per tašką, kurio abscisė x, ir statmena ašiai Ox, yra arba skritulys, arba daugiakampis su kiekvienu $x \in [a; b]$ (kai $x = a$ ir $x = b$, pjūvis gali būti ir taškas; pavyzdžiui, taip yra 168 paveiksle, kai $x = a$). Figūros $F(x)$ plotą pažymėkime $S(x)$ ir laikykime, kad funkcija $S(x)$ tolydi skaičių atkarpoje $[a; b]$.

Taškais $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ skaičių atkarpą $[a; b]$ padalykime į n lygių dalių. Per taškus, kurių abscisės x_i, išveskime ašiai Ox statmenas plokštumas (169 pav.). Šios plokštumos kūną T padalija į n kūnų: $T_1, T_2, ..., T_n$. Jei pjūvis $F(x_i)$ — skritulys, tai kūno T_i tūris (169 paveiksle tas kūnas subrūkšniuotas) apytiksliai lygus ritinio, kurio pagrindas $F(x_i)$ ir aukštinė $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, tūriui. Jei $F(x_i)$ — daugiakampis, tai kūno T_i tūris apytiksliai lygus stačiosios prizmės, kurios pagrindas $F(x_i)$ ir aukštinė Δx_i, tūriui. Abiem atvejais kūno T_i tūris apytiksliai lygus $S(x_i) \cdot \Delta x_i$, o viso kūno T tūrį V apytiksliai galima apskaičiuoti pagal formulę

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \cdot \Delta x_i. \qquad (1)$$

Kūno T tūrio apytikslė reikšmė V_n tuo tikslesnė, kuo didesnis n, vadinasi, kuo mažesnis Δx_i. Be įrodymo laikysime, kad $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ lygi kūno tūriui: $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$. Antra vertus, suma V_n yra tolydžiosios funkcijos $S(x)$ skaičių intervale $[a; b]$ integralinė suma, todėl $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \int_a^b S(x)dx$. Taigi gavome formulę tūriui apskaičiuoti taikant integralą:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (2)$$

Ją vadinsime kūnų tūrių apskaičiavimo *pagrindinė fòrmule.*

Taikydami šią formulę, apskaičiuosime kai kurių III ir VI skyriuose nagrinėtų kūnų tūrius.

68. Pasvirosios prizmės tūris

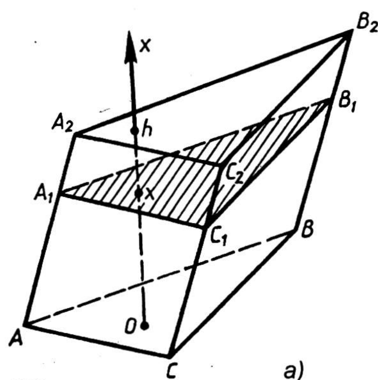
> T e o r e m a. ***Pasvirosios prizmės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės sandaugai.***

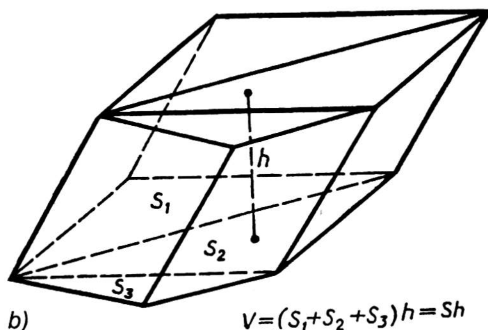
Į r o d y m a s. Pirmiausia teoremą įrodysime trikampės prizmės atveju, po to — bet kurios prizmės atveju.

1. Nagrinėkime trikampę prizmę. Jos tūrį, pagrindo plotą ir aukštinę pažymėkime atitinkamai raidėmis V, S ir h. Pažymėkime vieno prizmės pagrindo tašką O, ašį Ox parinkime statmeną pagrindams (170 pav., *a*). Nagrinėkime prizmės pjūvį, gautą prizmę perkirtus ašiai Ox statmena plokštuma, taigi su pagrindo plokštuma lygiagrečia plokštuma. Tos plokštumos ir ašies Ox susikirtimo taško abscisę pažymėkime raide x, o pjūvio plotą — $S(x)$. Įrodysime, kad plotas $S(x)$ lygus prizmės pagrindo plotui S. Pabrėžiame, kad trikampiai ABC (prizmės pagrindas) ir $A_1B_1C_1$ (prizmės pjūvis, gautas perkirtus ją nagrinėjama plokštuma) lygūs. Įsitikinsime šio teiginio teisingumu. Keturkampis AA_1B_1B — lygiagretainis (atkarpos AA_1 ir BB_1 lygios ir lygiagrečios), todėl $A_1B_1 = AB$. Taip pat įrodoma, kad $B_1C_1 = BC$ ir $A_1C_1 = AC$. Taigi trikampiai $A_1B_1C_1$ ir ABC lygūs (pagal tris kraštines). Vadinasi, $S(x) = S$. Pritaikę kūnų tūrių apskaičiavimo pagrindinę formulę, kai $a = 0$ ir $b = h$, gauname:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$

2. Dabar įrodysime teoremą bet kurios prizmės atveju. Prizmės aukštinę ir pagrindo plotą pažymėkime raidėmis h ir S. Tokią prizmę galima padalyti į trikampes prizmes, turinčias bendrą aukštinę h (170 paveiksle, *b*, šitaip padalyta penkiakampė prizmė). Kiekvienos trikampės prizmės





170 pav.

tūrį išreikškime įrodyta formule ir sudėkime jų tūrius. Iškėlę už skliaustų bendrą dauginamąjį h, skliaustuose gausime trikampių prizmių pagrindų plotų sumą, t. y. pradinės piramidės pagrindo plotą S. Taigi ieškomosios prizmės tūris lygus $S \cdot h$. Teorema įrodyta.

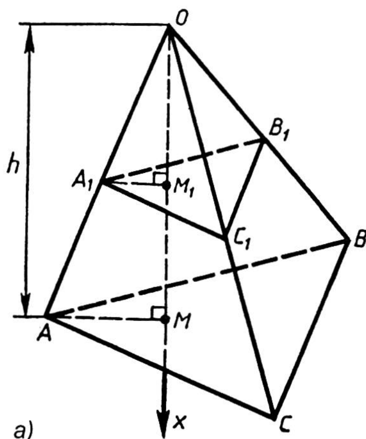
P a s t a b a. Pasvirosios prizmės tūrį galima apskaičiuoti ir kitaip. Jis lygus šoninės briaunos ir prizmės pjūvio, gauto prizmę perkirtus jo šoninėms briaunoms statmena ir jas kertančia plokštuma, ploto sandaugai. Trumpai sakoma taip: *pasvirosios prizmės tūris lygus jos šoninės briaunos ir jai statmeno pjūvio ploto sandaugai* (žr. 682 uždavinį).

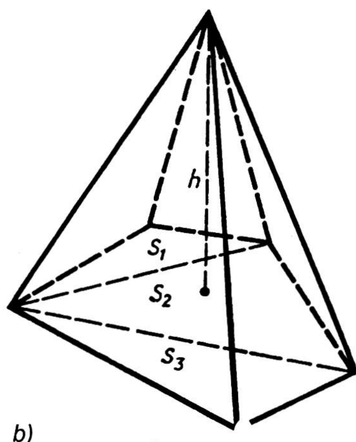
69. Piramidės tūris

T e o r e m a. ***Piramidės tūris lygus jos pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.***

Į r o d y m a s. Pirma teoremą įrodysime trikampės piramidės atveju, po to — bet kurios piramidės atveju.

1. Nagrinėkime trikampę piramidę $OABC$. Jos tūrį, pagrindo plotą ir aukštinę pažymėkime atitinkamai raidėmis V, S ir h. Išveskime ašį Ox (171 pav., *a*; čia OM — piramidės aukštinė). Išnagrinėkime piramidės pjūvį $A_1B_1C_1$, gautą piramidę perkirtus plokštuma, statmena ašiai Ox, t. y. su pagrindo plokštuma lygiagrečia plokštuma. Tos plokštumos ir ašies Ox susikirtimo taško M_1 abscisę pažymėkime raide x, o pjūvio plotą — $S(x)$. Plotą $S(x)$ išreikšime dydžiais S, h, x. Įsitikinsime, kad trikampiai $A_1B_1C_1$ ir ABC panašūs. Kadangi $A_1B_1 \parallel AB$, tai $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OAB$. Vadinasi, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Statieji trikampiai OA_1M_1 ir OAM irgi panašūs (jie turi bend-





171 pav.

rą smailųjį kampą, kurio viršūnė O), todėl $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Taigi $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. Panašiai įrodoma, kad $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$ ir $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$. Taigi trikampiai $A_1B_1C_1$ ir ABC panašūs, panašumo koeficientas $\frac{x}{h}$. Vadinasi, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, arba $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

Pritaikę kūnų tūrių apskaičiavimo pagrindinę formulę, kai $a = 0$, $b = h$, gauname:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S\cdot h.$$

2. Dabar įrodysime teoremą bet kurios piramidės atveju. Sakykime, piramidės aukštinė h, pagrindo plotas S. Tokią piramidę galima padalyti į trikampes piramides, kurių kiekvienos aukštinė h (171 paveiksle, b, parodyta, kaip padalyta penkiakampė piramidė). Kiekvienos trikampės piramidės tūrį išreikškime įrodyta formule ir sudėkime jų tūrius. Iškėlę už skliaustų bendrą dauginamąjį $\frac{1}{3}h$, skliaustuose gausime trikampių piramidžių pagrindų plotų sumą, t. y. nagrinėjamos piramidės pagrindo plotą S. Taigi nagrinėjamos piramidės tūris lygus $\frac{1}{3}Sh$. Teorema įrodyta.

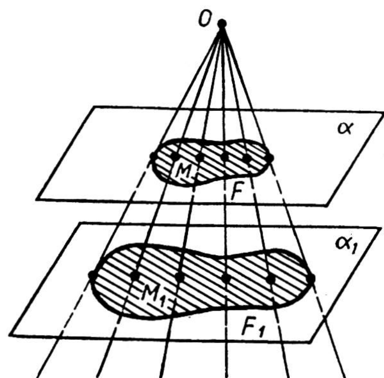
I š v a d a. *Nupjautinės piramidės, kurios aukštinė lygi h, o pagrindų plotai S ir S_1, tūrio formulė yra*

$$V = \frac{1}{3}h\,(S + S_1 + \sqrt{S\cdot S_1}). \qquad (3)$$

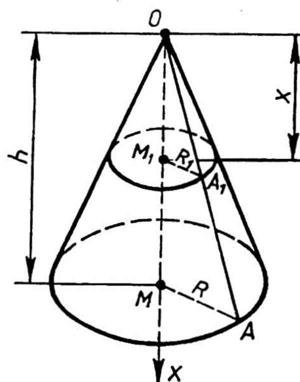
Kadangi nupjautinė piramidė gaunama nukirtus nuo piramidės tam tikrą mažesnę piramidę, tai nupjautinės piramidės tūris lygus pradinės piramidės ir nukirstosios piramidės tūrių skirtumui. Formulę išveskite savarankiškai.

P a s t a b a. Įrodydami piramidės tūrio teoremą įsitikinome, kad, trikampę piramidę perkirtus plokštuma, lygiagrečia su pagrindo plokštuma, gaunamas trikampis, panašus į pagrindą. Teisinga ir bendresnė savybė. Nagrinėkime kurią nors figūrą F, esančią plokštumoje α, ir tašką O, nesantį toje plokštumoje. Per kiekvieną figūros F tašką M išveskime tiesę OM ir išnagrinėkime tų tiesių bei plokštumos α_1, lygiagrečios su plokštuma α, susikirtimo taškų aibę F_1 (172 pav.). Galėsime įrodyti, kad figūra F_1 panaši į figūrą F.

Ši savybė dažnai taikoma praktikoje. Pavyzdžiui, ja paremta kino projekcinio aparato, fotoaparato, teleskopo ir kitų optinių prietaisų konstrukcija.



172 pav.



173 pav.

70. Kūgio tūris

T e o r e m a. ***Kūgio tūris lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės sandaugos trečdaliui.***

Į r o d y m a s. Nagrinėkime kūgį, kurio viršūnė O. Jo tūrį, pagrindo spindulį ir aukštinę pažymėkime raidėmis V, R ir h. Ašį Ox išveskime taip, kaip parodyta 173 paveiksle (OM — kūgio ašis). Kūgio pjūvis, gautas jį perkirtus ašiai Ox statmena plokštuma, yra skritulys, kurio centras M_1 yra tos plokštumos ir ašies Ox susikirtimo taškas (55 skyrelis). To skritulio spindulį pažymėkime R_1, o pjūvio plotą — $S(x)$; čia x — taško M_1 abscisė. Iš stačiųjų trikampių OM_1A_1 ir OMA panašumo išplaukia, kad $\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}$ arba $\frac{x}{h} = \frac{R_1}{R}$. Iš čia $R_1 = \frac{xR}{h}$.

Kadangi $S(x) = \pi R_1^2$, tai $S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2} x^2$.

Pritaikę kūnų tūrių apskaičiavimo pagrindinę formulę, kai $a = 0$, $b = h$, gauname:

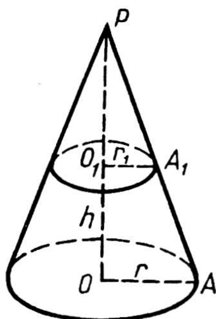
$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Kūgio pagrindo plotas S lygus πR^2, todėl $V = \frac{1}{3} Sh$. Teorema įrodyta.

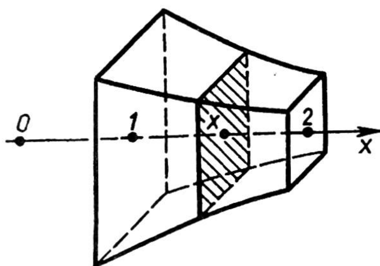
I š v a d a. *Nupjautinio kūgio, kurio aukštinė lygi h, o pagrindų plotai S ir S_1, tūris*

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right). \qquad (4)$$

Pasinaudodami 174 paveikslu, šią formulę išveskite savarankiškai.



174 pav.



175 pav.

Uždaviniai

673. 175 paveiksle pavaizduoto kūno pjūvis, gautas jį perkirtus ašiai Ox statmena plokštuma, einančia per tašką, kurio abscisė x, yra kvadratas, o kraštinė lygi $\frac{1}{x}$. Raskite to kūno tūrį.

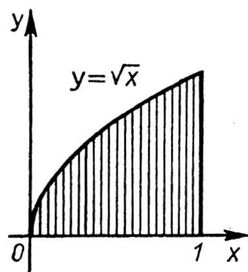
674. 176 paveiksle subrūkšniuota figūra yra apsukta apie ašį Ox. Raskite gauto kūno tūrį.

675. 177 paveiksle subrūkšniuota figūra yra apsukta apie ašį Oy. Raskite gauto kūno tūrį.

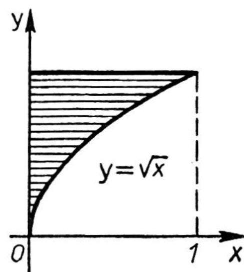
676. Pasvirosios prizmės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinės 10 cm, 10 cm ir 12 cm, šoninė briauna lygi 8 cm ir su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

677. Raskite pasvirosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ tūrį, kai $AB = BC = CA = a$, ABB_1A_1 — rombas, $AB_1 < BA_1$, $AB_1 = b$, dvisienis kampas, kurio briauna AB, status.

678. Prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra lygiakraštis trikampis ABC, kurio kraštinė m. Viršūnės A_1 projekcija yra to pagrindo centras, o briauna AA_1 su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite prizmės tūrį.



176 pav.



177 pav.

679. Pasvirosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, kurio statiniai $AB = 7$ cm ir $AC = 24$ cm. Viršūnė A_1 vienodai nutolusi nuo viršūnių A, B ir C, o briauna AA_1 su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

680. Pasvirojo gretasienio pagrindas yra stačiakampis, kurio kraštinės a ir b. Šoninės briaunos ilgis lygus c. Ji su gretimomis pagrindo kraštinėmis sudaro kampus, lygius φ. Raskite gretasienio tūrį.

681. Gretasienio visos sienos — lygūs rombai, kurių įstrižainės 6 cm ir 8 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

682. Įrodykite, kad pasvirosios prizmės tūris lygus šoninės briaunos ir prizmės pjūvio, gauto prizmę perkirtus jos šoninėms briaunoms statmena ir jas kertančia plokštuma, ploto sandaugai.

683. Apskaičiuokite pasvirosios trikampės prizmės tūrį, kai atstumai tarp jos šoninių briaunų lygūs 37 cm, 13 cm ir 30 cm, o šoninio paviršiaus plotas 480 cm^2.

684. Apskaičiuokite piramidės, kurios aukštinė h, tūrį, kai: a) $h = 2$ m, o pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė 3 m; b) $h = 2{,}2$ m, o pagrindas yra trikampis ABC, kurio $AB = 20$ cm, $BC = 13{,}5$ cm, $\angle ABC = 30^\circ$.

685. Apskaičiuokite taisyklingosios trikampės piramidės tūrį. Jos aukštinė lygi 12 cm, o pagrindo kraštinė — 13 cm.

686. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė briauna lygi l. Raskite tos piramidės tūrį, kai: a) šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ; b) šoninė briauna su esančia prie jos pagrindo kraštine sudaro kampą α; c) plokščiasis kampas prie viršūnės lygus β.

687. Taisyklingosios trikampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus φ, o pagrindo kraštinė lygi a. Raskite piramidės tūrį.

688. Raskite taisyklingosios keturkampės piramidės tūrį, kai: a) jos aukštinė lygi H, o dvisienis kampas prie pagrindo β; b) pagrindo kraštinė lygi m, o plokščiasis kampas prie viršūnės α.

689. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna lygi m ir su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Raskite piramidės tūrį.

690. Taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninė briauna lygi 13 cm, o į pagrindą įbrėžto skritulio skersmuo 6 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

691. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis ABC, kurio $AB = BC = 13$ cm, $AC = 10$ cm. Kiekviena piramidės šoninė briauna su aukštine sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

692. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statiniai a ir b. Kiekviena jos šoninė briauna į pagrindo plokštumą pasvirusi kampu φ. Raskite piramidės tūrį.

693. Keturkampės piramidės tūris lygus V. Jos pagrindas — stačiakampis, kurio įstrižainė b, kampas tarp įstrižainių α. Piramidės šoninės briaunos į pagrindo plokštumą pasvirusios tuo pačiu kampu. Raskite tą kampą.

694. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė 6 cm. Kiekvienas dvisienis kampas prie pagrindo lygus 45°. Piramidės aukštinė lygi 1,5 cm. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

695. Raskite trikampės piramidės $SABC$ tūrį, kai: a) $\angle CAB = 90^\circ$, $BC = c$, $\angle ABC = \varphi$ ir kiekviena šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą θ; b) $AB = 12$ cm, $BC = CA = 10$ cm ir dvisieniai kampai prie pagrindo lygūs 45°; c) šoninės briaunos paporiui statmenos, o jų ilgiai a, b ir c.

696. Piramidės $DABC$ pagrindas yra trikampis, kurio $AB = 20$ cm, $AC = 29$ cm, $BC = 21$ cm. Sienos DAB ir DAC statmenos pagrindo plokštumai, o siena DBC su ja sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

697. Taisyklingosios nupjautinės trikampės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir $0{,}5a$, šoninės sienos apotema a. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

698. Nupjautinės piramidės pagrindai — lygiašoniai statieji trikampiai, kurių įžambinės m ir n ($m > n$). Dvi šoninės sienos, einančios per statinius, statmenos pagrindui, o trečia siena su pagrindu sudaro kampą φ. Raskite nupjautinės piramidės tūrį.

699. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 24 dm ir 18 dm. Kiekviena šoninė briauna 25 dm. Piramidė perkirsta plokštuma, lygiagrečia su pagrindo plokštuma ir šoninę briauną dalija pusiau. Apskaičiuokite gautos nupjautinės piramidės tūrį.

700. Taisyklingosios nupjautinės keturkampės piramidės pagrindų kraštinės lygios 6 cm ir 4 cm. Piramidė perkirsta plokštuma, einančia per dvi šonines briaunas, nesančias vienoje sienoje. Gauto pjūvio plotas lygus 15 cm^2. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

701. Sakykime, h, r ir V — kūgio aukštinė, pagrindo spindulys ir tūris. Apskaičiuokite: a) V, kai $h = 3$ cm, $r = 1{,}5$ cm; b) h, kai $r = 4$ cm, $V = 48\pi$ cm^3; c) r, kai $h = m$, $V = p$.

702. Kūgio aukštinė lygi 5 cm. Jį kerta su pagrindu lygiagreti plokštuma, nutolusi nuo viršūnės per 2 cm. Nuo jo nukirsto mažesniojo kūgio tūris lygus 24 cm^3. Apskaičiuokite pradinio kūgio tūrį.

703. Kūgio pagrindo plotas lygus Q, o šoninio paviršiaus plotas P. Raskite kūgio tūrį.

704. Kūgio aukštinė lygi jo pagrindo skersmeniui. Raskite kūgio, kurio aukštinė lygi H, tūrį.

705. Kūgio sudaromoji 13 cm, o ašinio pjūvio plotas lygus 60 cm^2. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

706. Kūgio aukštinė 12 cm, o jo tūris lygus 324π cm^3. Kūgio šoninis paviršius išklotas plokštumoje. Raskite gautos išpjovos kampą.

707. Kūgio paviršiaus plotas 45π dm^2. Išklotas plokštumoje kūgio šoninis paviršius yra 60° skritulio išpjova. Raskite kūgio tūrį.

708. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai 3 m ir 6 m, o sudaromoji 5 m. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio tūrį.

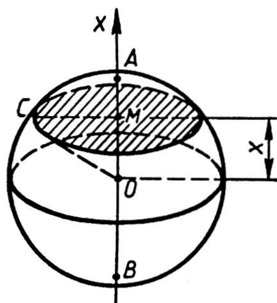
709. Nupjautinio kūgio aukštinė h, sudaromoji l, šoninio paviršiaus plotas S. Raskite nupjautinio kūgio ašinio pjūvio plotą ir tūrį.

§ 4. RUTULIO TŪRIS IR SFEROS PLOTAS

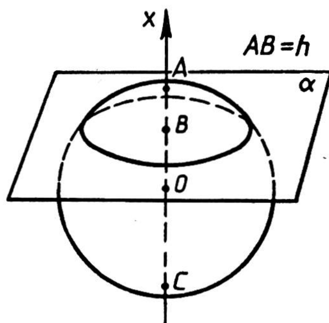
71. Rutulio tūris

T e o r e m a. ***Rutulio, kurio spindulys R, tūris lygus*** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Į r o d y m a s. Nagrinėkime rutulį, kurio spindulys R, centras O. Ašimi Ox pasirinkime bet kurią tiesę, einančią per tašką O (178 pav.). Rutulį perkirtę plokštuma, statmena ašiai Ox ir einančia per tos ašies tašką M, gausime skritulį, kurio centras M. To skritulio spindulį pažymė-



178 pav.



179 pav. Rutulio nuopjova.

kime raide r, o jo plotą — $S(x)$; čia x — taško M abscisė. Plotą $S(x)$ išreikšime abscise x ir spinduliu R. Iš stačiojo trikampio OMC gauname:

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Kadangi $S(x) = \pi r^2$, tai

$$S(x) = \pi\,(R^2 - x^2). \tag{1}$$

Kad ir kur būtų taško M vieta skersmenyje AB, ši formulė teisinga, t. y. ji galioja su visais x, tenkinančiais sąlygą $-R \le x \le R$. Pritaikę kūnų tūrių apskaičiavimo pagrindinę formulę, kai $a = -R$, $b = R$, gauname:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\,(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Teorema įrodyta.

72. Rutulio nuopjovos, rutulio sluoksnio ir rutulio išpjovos tūris

a) *Rùtulio núopjova* vadinama rutulio dalis, kurią nuo jo nukerta kuri nors plokštuma. 179 paveiksle kertamoji plokštuma α, einanti per tašką B, rutulį padalija į dvi rutulio nuopjovas. Pjūvio skritulys vadinamas kiekvienos tų *nuopjovų pagrindu*, o kertamajai plokštumai statmeno skersmens AC atkarpų AB ir BC ilgiai vadinami atitinkamų rutulio *nuopjovų aukštinėmis*.

Jei rutulio spindulys R, o nuopjovos aukštinė h (179 paveiksle $h = AB$), tai rutulio nuopjovos tūrio formulė yra

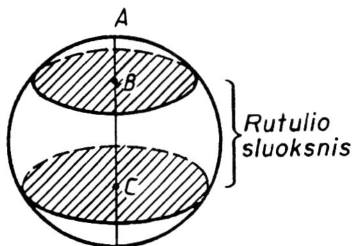
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{2}$$

Įrodysime. Išveskime ašį Ox, statmeną plokštumai α (žr. 179 pav.). Tada rutulio nuopjovos pjūvio, gauto perkirtus ją ašiai Ox statmena plokštuma, plotas $S(x)$ išreiškiamas (1) formule, o $R - h \le x \le R$. Pritaikę tūrių apskaičiavimo pagrindinę formulę, kai $a = R - h$, $b = R$, gauname:

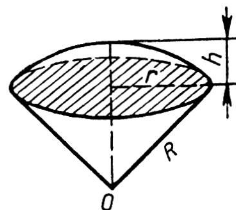
$$V = \pi \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

b) *Rùtulio slúoksniu* vadinama rutulio dalis, esanti tarp dviejų lygiagrečių kertamųjų plokštumų (180 pav.). Skrituliai, susidarę lygiagrečiomis plokštumomis perkirtus rutulį, vadinami rutulio *sluoksnio pagrindais*, o atstumas tarp tų plokštumų — rutulio sluoksnio *aukštine*.

Rutulio sluoksnio tūrį galima apskaičiuoti kaip dviejų rutulio nuopjovų tūrių skirtumą. (Pavyzdžiui, 180 paveiksle rutulio sluoksnio tūris lygus rutulio nuopjovų, kurių aukštinės AC ir AB, tūrių skirtumui.)



180 pav.



181 pav. Rutulio išpjova.

c) *Rùtulio ìšpjova* vadinamas kūnas, gautas skritulio išpjovą, kurios kampas mažesnis už 90°, apsukus apie tiesę, einančią per vieną skritulio išpjovą ribojančių spindulių (181 pav.). Rutulio išpjovą sudaro rutulio nuopjova ir kūgis. Kai rutulio spindulys yra R, o rutulio nuopjovos aukštinė lygi h, rutulio išpjovos tūrio V formulė yra

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \tag{3}$$

Išveskite šią formulę savarankiškai.

73. Sferos plotas. 62 skyrelyje be įrodymo pateikėme sferos, kurios spindulys R, ploto apskaičiavimo formulę:

$$S = 4\pi R^2. \tag{4}$$

Išvesime šią formulę, remdamiesi rutulio tūrio formule.

Nagrinėkime sferą, kurios spindulys R ir centras O, bei apie ją apibrėžtą briaunainį, turintį n sienų. Tas sienas sunumeruokime kaip norime. Sienos, kurios numeris i ($i = 1, 2, ..., n$), plotą pažymėkime S_i. Sferos centrą atkarpomis sujungę su visomis briaunainio viršūnėmis, gausime n piramidžių, kurių viršūnė O bendra, pagrindai yra briaunainio sienos, o aukštinės — sferos spinduliai, išvesti į briaunainio sienų ir sferos lietimosi taškus. Vadinasi, piramidės, kurios numeris i, tūris lygus $\frac{1}{3}S_iR$, o viso apibrėžtinio briaunainio tūris V_n yra

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}S_iR = \frac{1}{3}R\sum_{i=1}^{n}S_i = \frac{1}{3}RP_n;$$

čia $P_n = \sum_{i=1}^{n}S_i$ — briaunainio paviršiaus plotas. Iš čia gauname:

$$P_n = \frac{3V_n}{R}. \tag{5}$$

Apibrėžtinio briaunainio sienos, kurios numeris i, didžiausią matmenį pažymėkime δ_i. Aišku, kad nėra tos sienos taškų, nuo taško O nutolusių atstumu, didesniu už $R + \delta_i$. Taigi jei δ — didžiausias iš visų δ_i, tai

nagrinėjamas įbrėžtinis briaunainis yra rutulyje, kurio centras O, spindulys $(R + \delta)$. Remdamiesi rutulio tūrio formule ir tūrio savybėmis, gauname:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3.$$

Dabar neribotai didinsime n, kad apibrėžtinio briaunainio kiekvienos sienos didžiausias matmuo artėtų prie nulio. Tada apibrėžtinio briaunainio tūris V_n artės prie rutulio tūrio.

Kadangi $\frac{4}{3}\pi(R+\delta)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$, kai $\delta \to 0$, tai ir

$$V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ kai } \delta \to 0 \ (n \to \infty).$$

(5) lygybėje perėję prie ribos, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3V_n}{R} = \frac{3}{R}\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{3}{R}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2.$$

Remiantis sferos ploto apibrėžimu, gaunama: $S = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, todėl

$$S = 4\pi R^2.$$

Klausimai ir uždaviniai

710. Sakykime, V — rutulio, kurio spindulys R, tūris, S — jo paviršiaus plotas. Apskaičiuokite: a) S ir V, kai R = 4 cm; b) R ir S, kai V = 113,04 cm^3; c) R ir V, kai $S = 64\pi$ cm^2.

711. Mėnulio skersmuo sudaro (apytiksliai) ketvirtadalį Žemės skersmens. Mėnulį ir Žemę laikydami rutuliais, palyginkite jų tūrius.

712. Rutulio ir ritinio tūriai lygūs, o rutulio skersmuo lygus ritinio pagrindo skersmeniui. Ritinio aukštinę išreikškite rutulio spinduliu.

713. Vaflinis ledų kaušelis yra kūgio formos. Jo gylis 12 cm, viršutinės dalies skersmuo 5 cm. Pardavėja virš jo kraštų padėjo du 5 cm skersmens pusrutulio formos šaukštus ledų. Ar ištirpę ledai perpildys kaušelį?

714. Į cilindrinę menzūrą, iki tam tikro lygio pripildytą vandens, buvo įmesti 4 metaliniai rutuliukai, kurių kiekvieno skersmuo 1 cm. Menzūros skersmuo 2,5 cm. Kiek pakito vandens lygis menzūroje?

715. Nutarta įrengti rutulio nuopjovos formos gėlyną. Jos pagrindo spindulys 5 m ir aukštinė 60 cm. Kiek kubinių metrų žemės reikės tam gėlynui įrengti?

716. Vieno iš dviejų lygių rutulių centras yra kito rutulio paviršiuje. Koks rutulių bendros dalies tūrio ir vieno jų tūrio santykis?

717. Rutulio nuopjovos pagrindo spindulys lygus 60 cm, o rutulio spindulys lygus 75 cm. Apskaičiuokite rutulio nuopjovos tūrį.

718. Rutulio skersmuo padalytas į tris lygias dalis ir per dalijimo taškus išvestos skersmeniui statmenos plokštumos. Raskite gauto rutulio sluoksnio tūrį, kai rutulio spindulys lygus R.

719. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma skersmenį dalija į 6 cm ir 12 cm dalis. Apskaičiuokite gautų rutulio dalių tūrį.

720. Rutulio nuopjovos apskritimo spindulys 60 cm, o rutulio spindulys 75 cm. Apskaičiuokite rutulio atitinkamos išpjovos tūrį.

721. Skritulio išpjova, kurios kampas 30° ir spindulys R, apsukta apie vieną ją ribojančių spindulių. Raskite gautos rutulio išpjovos tūrį.

722. Vanduo dengia apie $\frac{3}{4}$ Žemės paviršiaus. Kiek kvadratinių kilometrų Žemės paviršiaus užima sausuma? (Laikykite, kad Žemės spindulys lygus 6375 km.)

723. Futbolo kamuolio spindulys 10 cm. Kiek odos reikia jam pasiūti? (Siūlėms pridedami 8 % kamuolio paviršiaus ploto.)

724. Įrodykite, kad sferos plotas lygus kūgio, kurio aukštinė lygi sferos skersmeniui, o pagrindo skersmuo — kūgio sudaromajai, paviršiaus plotui.

VII SKYRIAUS KLAUSIMAI

1. Kaip susiję kūnų P_1 ir P_2 tūriai V_1 ir V_2, kai: a) kūnas P_1 yra kūne P_2; b) kiekvieną iš kūnų P_1 ir P_2 sudaro n kubų, kurių briauna 1 cm?
2. Per stačiosios trikampės prizmės pagrindų vidurines linijas eina plokštuma. Kurią stačiosios prizmės tūrio dalį sudaro nukirstos trikampės prizmės tūris?
3. Ar pakis ritinio tūris, jei jo pagrindo skersmenį 2 kartus padidinsime, o aukštinę 4 kartus sumažinsime?
4. Kaip pakis taisyklingosios piramidės tūris, kai jos aukštinę padidinsime n kartų, o pagrindo kraštinę sumažinsime n kartų?
5. Dviejų piramidžių aukštinės lygios, o pagrindai yra keturkampiai, kurių atitinkamos kraštinės lygios. Ar lygūs tų piramidžių tūriai?
6. Dviejų kūgių aukštinės lygios, o pagrindų spindulių santykis lygus 2. Koks kūgių tūrių santykis?
7. Iš kokių kūnų sudarytas kūnas, gautas lygiašonę trapeciją apsukus apie jos didesnįjį pagrindą?

11. 780

8. Vienas kūgis gautas nelygiašonį statųjį trikampį apsukus apie vieną statinį, kitas — apie kitą statinį. Ar tų kūgių tūriai lygūs?
9. Vieno rutulio skersmuo lygus kito rutulio spinduliui. Koks yra: a) tų rutulių spindulių santykis; b) rutulių tūrių santykis?
10. Kiek reikia paimti 2 cm spindulio rutulių, kad jų tūrių suma būtų lygi rutulio, kurio spindulys 6 cm, tūriui?
11. Kiek kartų apibrėžto apie kubą rutulio tūris didesnis už rutulio, įbrėžto į tą kubą, tūrį?
12. Kaip pakis sferos plotas, kai jos spindulį: a) sumažinsime 2 kartus; b) padidinsime 3 kartus?
13. Dviejų rutulių tūrių santykis lygus 8. Koks jų paviršių plotų santykis?
14. Koks dviejų rutulių tūrių santykis, kai jų paviršių plotų santykis yra $m^2 : n^2$?

Papildomi uždaviniai

725. Trijų paporiui gretimų stačiakampio gretasienio sienų plotai lygūs S_1, S_2 ir S_3. Išreikškite šiais plotais gretasienio tūrį ir apskaičiuokite jį, kai $S_1 = 6$ dm^2, $S_2 = 12$ dm^2, $S_3 = 18$ dm^2.

726. Stačiakampio gretasienio trijų sienų įstrižainės, išeinančios iš vienos viršūnės, lygios 7 cm, 8 cm ir 9 cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

727. Stačiakampio gretasienio šoninė briauna lygi a. Pjūvis, išvestas per dvi skirtingų pagrindų kraštines, yra kvadratas, kurio plotas Q. Raskite gretasienio tūrį.

728. Stačiojo gretasienio pagrindų kraštinės 7 cm ir $3\sqrt{2}$ cm, o pagrindo smailusis kampas lygus 45°. Mažesnioji gretasienio įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

729. Stačiojo gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainės BD_1 ir A_1C viena kitai statmenos ir lygios 6 cm ir 8 cm, $AB = 3$ cm. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

730. Stačiosios prizmės, kurios pagrindas yra statusis trikampis, penkios briaunos lygios a, o kitos keturios briaunos — viena kitai. Raskite prizmės tūrį.

731. Stačiosios prizmės, kurios pagrindas yra statusis trikampis, tūris 3 m^3, o mažiausias ir didžiausias iš šoninių sienų plotų lygūs 3 m^2 ir $3\sqrt{5}$ m^2. Apskaičiuokite prizmės briaunų ilgius.

732. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninės sienos įstrižainė lygi d ir su kitos šoninės sienos plokštuma sudaro kampą φ. Raskite prizmės tūrį.

733. Įrodykite, kad trikampės prizmės tūris lygus šoninės sienos ploto ir atstumo nuo tos sienos iki su ja lygiagrečios briaunos sandaugos pusei.

734. Trijose lygiagrečiose tiesėse, nesančiose vienoje plokštumoje, atidėtos trys lygios atkarpos AA_1, BB_1 ir CC_1. Įrodykite, kad prizmės, kurios šoninės briaunos yra tos atkarpos, tūris nepriklauso nuo atkarpų padėties tose tiesėse.

735. Pasvirosios trikampės prizmės šoninių sienų plotai proporcingi skaičiams 20, 37, 51. Šoninė briauna lygi 0,5 dm, o šoninio paviršiaus plotas 10,8 dm^2. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

736. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ. Nesanti toje sienoje pagrindo viršūnė nuo jos nutolusi per atstumą m. Raskite šios piramidės tūrį.

737. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė briauna su pagrindu sudaro kampą φ, o tos briaunos vidurys nuo piramidės pagrindo nutolęs per atstumą m. Raskite piramidės tūrį.

738. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi h, o dvisienis kampas, kurio briauna yra piramidės šoninė briauna, lygus 2φ. Raskite piramidės tūrį.

739. Taisyklingosios n-kampės piramidės plokščiasis kampas prie viršūnės lygus α, o pagrindo kraštinė lygi a. Raskite piramidės tūrį.

740. Piramidės pagrindas yra trikampis, kurio du kampai lygūs φ_1 ir φ_2. Piramidės aukštinė h, o kiekviena šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą φ_3. Raskite piramidės tūrį.

741. Keturkampės piramidės aukštinė lygi H. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis. Kampas tarp jo įstrižainių α. Paporiui lygios piramidės priešingos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro kampus β ir γ. Raskite piramidės tūrį.

742. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė a. Piramidės dvi šoninės sienos yra statmenos pagrindo plokštumai ir sudaro bukąjį dvisienį kampą φ. Kitos dvi šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro dvisienius kampus θ. Raskite piramidės tūrį.

743. Dvi tetraedro briaunos lygios b, o kitos keturios briaunos lygios a. Raskite tetraedro tūrį, kai briaunos, kurių ilgiai b: a) turi bendrų taškų; b) neturi bendrų taškų.

744. Nupjautinės piramidės pagrindų atitinkamų kraštinių santykis 2 : 5. Kokiu santykiu jos tūrį dalija plokštumà, einanti per tos piramidės aukštinės vidurį ir lygiagreti su pagrindais?

745. Raskite ritinio tūrį, kai: a) šoninio paviršiaus plotas lygus S, o pagrindo plotas lygus Q; b) ašinis pjūvis yra kvadratas, o aukštinė lygi h; c) ašinis pjūvis yra kvadratas, o paviršiaus plotas lygus S.

746. Įrodykite, kad dviejų ritinių, kurių šoninių paviršių plotai lygūs, tūrių santykis lygus jų spindulių santykiui.

747. Kūgiško bako gylis 3 m, o jo apvalaus viršaus spindulys 1,5 m. Kiek litrų skysčio telpa jame?

Įvairūs briaunainių, ritinio, kūgio ir rutulio uždaviniai

748. Į kūgį įbrėžta piramidė, kurios pagrindas — stačiakampis. Mažesnioji jo kraštinė lygi a, o smailusis kampas tarp stačiakampio įstrižainių lygus φ_1. Šoninė siena, kurioje yra mažesnioji pagrindo kraštinė, su pagrindo plokštuma sudaro dvisienį kampą φ_2. Raskite kūgio tūrį.

749. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė a ir smailusis kampas φ_1. Į piramidę įbrėžtas kūgis, kurio sudaromoji su pagrindo plokštuma sudaro kampą θ. Raskite kūgio tūrį.

750. Į ritinį įbrėžtas rutulys. Raskite ritinio ir rutulio tūrių santykį.

751. Kūgio pagrindo spindulys 6 dm, o į kūgį įbrėžtos sferos spindulys 3 dm. Raskite kūgio tūrį.

752. Į kūgį, kurio pagrindo spindulys r, o sudaromoji l, įbrėžta sfera. Raskite sferos ir kūgio šoninio paviršiaus lietimosi linijos ilgį.

753. Į nupjautinį kūgį, kurio pagrindų spinduliai r ir r_1, įbrėžtas rutulys. Raskite nupjautinio kūgio ir rutulio tūrių santykį.

754. Į taisyklingąją trikampę piramidę, kurios dvisienis kampas prie pagrindo α, įbrėžtas rutulys. Jo tūris V. Raskite piramidės tūrį.

755. Piramidės pagrindas yra rombas, kurio kraštinė a ir kampas α. Kiekviena piramidės šoninė siena su pagrindu sudaro kampą β. Į piramidę įbrėžtas rutulys. Raskite jo tūrį.

756. Į sferą, kurios spindulys R, įbrėžtas ritinys. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė su pagrindu sudaro kampą α. Raskite ritinio tūrį.

757. Į rutulį įbrėžtas ritinys. Kampas tarp ritinio ašinio pjūvio įstrižainių lygus α. Ritinio sudaromoji lygi l. Raskite rutulio tūrį.

758. Į rutulį įbrėžtas kūgis, kurio pagrindo spindulys r, o aukštinė H. Raskite rutulio paviršiaus plotą ir tūrį.

759. Į rutulį įbrėžta piramidė. Jos pagrindas yra statusis trikampis, kurio įžambinė 2 cm. Piramidės kiekviena šoninė briauna su pagrindu sudaro kampą α. Raskite rutulio paviršiaus plotą ir tūrį.

760. Į rutulį įbrėžta piramidė. Jos pagrindas stačiakampis, kurio įstrižainė 10 cm. Piramidės kiekviena šoninė briauna su pagrindu sudaro kampą β. Raskite rutulio paviršiaus plotą ir tūrį.

761. Prie cilindrinės cisternos pagrindų prijungtos lygios rutulio nuopjovos. Ritinio spindulys 1,5 m, o nuopjovos aukštinė 0,5 m. Koks turi būti cisternos cilindrinės dalies ilgis, kad cisternos talpa būtų 50 m^3?

762. Kubo, rutulio, ritinio ir kūgio (ritinio ir kūgio pagrindų skersmenys lygūs aukštinei) paviršių plotai lygūs. Kurio iš tų kūnų tūris didžiausias ir kurio — mažiausias?

763. Ar plūduriuos vandenyje tuščiaviduris varinis rutulys, kurio skersmuo lygus 10 cm, o sienelės storis: a) 2 mm; b) 1,5 mm? (Vario tankis 8,9 g/cm^3.)

SUNKESNI UŽDAVINIAI

764. Kampas tarp dviejų prasilenkiančiųjų tiesių lygus 90°. Kiekvienos d ilgio atkarpos galai yra tose tiesėse. Raskite visų tų atkarpų vidurio taškų aibę.

765. Tetraedro visos briaunos lygios. Tetraedras perkirstas plokštumomis, lygiagrečiomis su dviem priešingomis briaunomis. Įrodykite, kad pjūvių perimetrai lygūs.

766. Įrodykite, kad tetraedro dviejų priešingųjų briaunų kvadratų suma du kartus didesnė už atkarpų, jungiančių kitų priešingų briaunų vidurio taškus, kvadratų sumą.

767. Yra žinoma, kad iš bet kurio lygiakraščio trikampio galima suklijuoti tetraedrą, perlenkus trikampį pagal tris vidurines linijas ir suklijavus atitinkamas jo kraštinių dalis (žr. 88 pav.). Kokie turi būti trikampio kampai, kad iš jo nurodytu būdu suklijuotume tetraedrą?

768. Iš taško A, nesančio tiesėje BC, į einančias per ją plokštumas nuleisti statmenys. Raskite visų statmenų pagrindų aibę.

769. Įrodykite, kad jei viena tetraedro aukštinė eina per priešingosios sienos aukštinių susikirtimo tašką, tai ir kitos to tetraedro aukštinės eina per priešingųjų sienų aukštinių susikirtimo taškus.

770. Tetraedro $OABC$ visi plokštieji kampai prie viršūnės O lygūs 90°. Įrodykite, kad trikampio AOB plotas lygus trikampių ABC ir O_1AB (O_1 — taško O projekcija plokštumoje ABC) plotų geometriniam vidurkiui.

771. Tetraedro $OABC$ visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Įrodykite, kad trikampio ABC ploto kvadratas lygus kitų sienų plotų kvadratų sumai (*erdvinė Pitagoro teorema*).

772. Kiek yra plokštumų, kurių kiekviena vienodai nutolusi nuo keturių duotų taškų, nesančių vienoje plokštumoje?

773. Įrodykite, kad tiesė, kertanti dvi dvisienio kampo sienas, su jomis sudaro lygius kampus tada ir tik tada, kai susikirtimo taškai vienodai nutolę nuo briaunos.

774. Įrodykite, kad kubo pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma, gali būti taisyklingasis trikampis, kvadratas, taisyklingasis šešiakampis, tačiau negali būti taisyklingasis penkiakampis ir taisyklingasis daugiakampis, turintis daugiau negu šešias kraštines.

775. Įrodykite, kad atstumų nuo kubo viršūnių iki tiesės, einančios per kubo centrą, kvadratų suma nepriklauso nuo tos tiesės.

776. Kubą padalykite į šešis lygius tetraedrus.

777. Kambarys yra kubo formos. Briaunos viduryje tūnantis voras nori pagauti musę, tupinčią toliausiai nuo jo esančioje kubo viršūnėje. Kuriuo trumpiausiu keliu turi bėgti voras prie musės?

778. Įrodykite, kad kube galima išpjauti angą, pro kurią pralįstų tokių pat ir net didesnių matmenų kubas.

779. Taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninės sienos plotas lygus S. Piramidė perkirsta plokštuma, einančia per piramidės aukštinės vidurio tašką ir lygiagrečia su šoninės sienos plokštuma. Raskite gauto pjūvio plotą.

780. Kubo formos dėžutės briauna 1 cm. Į ją įdėtas taisyklingasis tetraedras. Kokia ilgiausia gali būti taisyklingojo tetraedro briauna?

781. Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad tetraedrų AB_1CD_1 ir C_1BA_1D sankirta yra taisyklingasis oktaedras.

782. Įrodykite, kad iš bet kurio baigtinio skaičiaus paporiui skirtingų kubų negalima padaryti stačiakampio gretasienio.

783. Kubo briauna lygi 1 cm. Su bet kuria jo siena lygiagreti plokštuma kerta kubo viduje einančią laužtę ne daugiau kaip viename taške. Įrodykite, kad laužtės ilgis mažesnis už 3 cm; kad galima sudaryti minėtas savybes turinčią laužtę, kurios ilgis kiek norima mažai skirtųsi nuo 3 cm.

784. Įrodykite, kad kiekvieno iškilojo briaunainio sienų ir viršūnių skaičiaus suma 2 didesnė už briaunų skaičių (*Eulerio teorema*).

785. Įrodykite, kad taisyklingojo dodekaedro sienų centrai yra taisyklingojo ikosaedro viršūnės.

786. Įrodykite, kad taisyklingojo ikosaedro sienų centrai yra taisyklingojo dodekaedro viršūnės.

787. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Atkarpa AS, kurios ilgis a, statmena plokštumai ABC. Raskite atstumą ir kampą tarp tiesių AB ir SC.

788. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Vienakrypčiuose spinduliuose BD ir CE, statmenuose plokštumai ABC, parinkti taškai D ir E; $BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CE = a\sqrt{2}$. Įrodykite, kad trikampis ADE statusis, ir raskite kampą tarp plokštumų ABC ir ADE.

789. Taikydami vektorius įrodykite, kad gretasienio keturių įstrižainių kvadratų suma lygi jo dvylikos briaunų kvadratų sumai.

790. Tetraedro $OABC$ pagrindas ABC permatomas, o visos kitos sienos — veidrodžiai. Visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Šviesos spindulys patenka į tetraedrą kirsdamas pagrindą ABC bet kuriuo kampu. Įrodykite, kad atsispindėjęs nuo tetraedro sienų, jis išeis priešinga įėjimui kryptimi. (Šia savybe pagrįstas ***kampinis atšvaitas***. Toks atšvaitas buvo paleistas į Mėnulį matuojant lazeriu jo nuotolį nuo Žemės.)

791. Iš taško A išeina keturi spinduliai AB, AC, AD ir AE; $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BAD = \angle DAC = 45^\circ$, o spindulys AE statmenas plokštumai ABD. Raskite kampą CAE.

792. Įrodykite, kad tetraedro aukštinės susikerta viename taške tada ir tik tada, kai tetraedro priešingosios briaunos statmenos.

793. Tetraedro trys šoninės briaunos lygios viena kitai. Įrodykite, kad tiesė, su tomis briaunomis sudaranti lygius kampus, statmena pagrindo plokštumai.

794. Tetraedro $OABC$ visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Įrodykite, kad viršūnės O projekcija plokštumoje ABC yra trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas.

795. Iš sferos taško išvestos trys paporiui statmenos stygos. Įrodykite, kad jų kvadratų suma nepriklauso nuo tų stygų padėties.

796. Plokštumos eina per tiesę, nekertančią rutulio. Raskite visų taip gautų rutulio pjūvių centrų aibę.

797. Raskite aibę visų taškų, iš kurių galima išvesti tris paporiui statmenas sferos liestines.

798. Į tetraedrą, kurio aukštinės h_1, h_2, h_3, h_4, įbrėžtas rutulys. Jo spindulys R. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$

799. Kaip turi būti susiję trijų paporiui vienas kitą liečiančių rutulių spinduliai, kad galėtume išvesti rutulių bendrą liečiamąją plokštumą?

800. Ant plokštumos yra keturi rutuliai, kurių spindulys R, be to, trys jų paporiui liečia vienas kitą, o ketvirtasis — du iš jų. Ant tų rutulių

iš viršaus padėti du mažesnio spindulio (r) rutuliai, kurie liečia vienas kitą, o kiekvienas jų — tris didesnius rutulius. Raskite mažesniųjų rutulių spindulį.

801. Ant plokštumos yra trys rutuliai, paporiui liečiantys vienas kitą. Kiekvieno jų spindulys R. Kūgio pagrindas yra toje plokštumoje, o minėti rutuliai liečia jį iš išorės. Kūgio aukštinė lygi λR. Raskite jo pagrindo spindulį.

802. Plokštumos AB_1C_1 ir A_1BC taisyklingąją trikampę prizmę $ABCA_1B_1C_1$ dalija į keturias dalis. Raskite tų dalių tūrių santykį.

803. Įrodykite, kad tetraedro tūris lygus $\frac{1}{6}abc \sin \varphi$; čia a ir b — priešingosios briaunos, o φ ir c — kampas tarp jų ir atstumas tarp jų.

804. Įrodykite, kad plokštuma, einanti per tetraedro briauną ir prieš ją esančios briaunos vidurio tašką, tetraedrą dalija į dvi dalis, kurių tūriai lygūs.

805. Piramidės $OABCD$ pagrindas yra lygiagretainis $ABCD$. Kokiu santykiu piramidės tūrį dalija plokštuma, einanti per tiesę AB ir sienos OCD vidurinę liniją?

806. Vienoje iš trijų lygiagrečių tiesių, nesančių vienoje plokštumoje, pažymėta atkarpa AB, o kitose dviejose — taškai C ir D. Įrodykite, kad tetraedro $ABCD$ tūris nepriklauso nuo taškų C ir D pasirinkimo.

807. E ir F — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų DC ir BB_1 vidurio taškai. Kubo briauna lygi 1 cm. Raskite tetraedro AD_1EF tūrį.

808. Dviejose lygiagrečiose plokštumose nubraižyti du daugiakampiai. Sujungus jų viršūnes atkarpomis, gautas briaunainis. Visos jo šoninės sienos yra trapecijos, trikampiai ir lygiagretainiai. Įrodykite, kad

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3);$$

čia V — briaunainio tūris, h — jo aukštinė, S_1 ir S_2 — pagrindų plotai, o S_3 — pjūvio, gauto briaunainį perkirtus plokštuma, lygiagrečia su pagrindų plokštumomis ir vienodai nutolusia nuo jų, plotas.

809. Du lygūs ritiniai, kurių spindulys lygus 1 cm, o aukštinės didesnės už jų skersmenis, padėti taip, kad jų ašys susikerta stačiu kampu. Susikirtimo taškas yra vienodai nutolęs nuo ritinių pagrindų. Raskite tų ritinių bendros dalies tūrį.

810. Apie rutulį apibrėžtas kūgis, kurio ašinio pjūvio viršūnės kampas α. Su kokia α reikšme kūgio tūris didžiausias?

811. Į kūgį įbrėžtas rutulys. Įrodykite, kad kūgio ir rutulio tūrių santykis lygus kūgio paviršiaus ir rutulį ribojančios sferos plotų santykiui.

812. Taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios pagrindo kraštinė a, o plokščiasis kampas prie viršūnės α, sukama apie tiesę, einančią per viršūnę ir lygiagrečią su pagrindo kraštine. Raskite gauto sukimosi kūno tūrį.

813. Rutulys gautas pusskritulį apsukus apie tiesę, kurioje yra jo skersmuo. Paviršius, gautas apsukus tam tikrą stygą, kurios vienas galas sutampa su nagrinėjamo skersmens galu, rutulį dalija į dvi lygiatūres dalis. Raskite kampo tarp tos stygos ir skersmens kosinusą.

814. Visos tetraedro aukštinės susikerta taške H, apie tetraedrą apibrėžtos sferos centras — taškas O, priešingųjų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškus ir tetraedro viršūnes jungiančių atkarpų susikirtimo taškas G. Įrodykite, kad taškai H, O ir G yra vienoje tiesėje (*Eulerio tiesė*), be to, taškai O ir H simetriški taško G atžvilgiu.

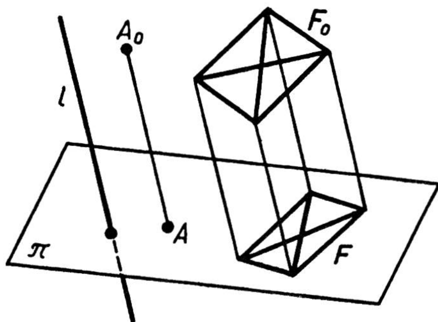
815. Tetraedro visos aukštinės susikerta viename taške. Įrodykite, kad visų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškai, tetraedro aukštinių pagrindai ir taškai, kurie kiekvieną atkarpą, jungiančią aukštinių susikirtimo tašką su viršūnėmis, dalija santykiu 2 : 1 pradedant nuo viršūnės ir priklauso vienai sferai (*Eulerio sfera*), kurios centras yra Eulerio tiesėje.

ERDVINIŲ FIGŪRŲ VAIZDAVIMAS

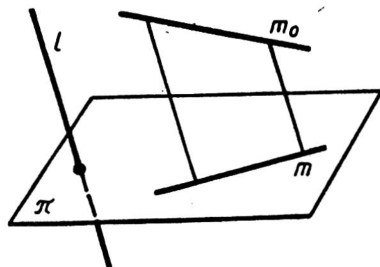
Mokantis stereometrijos didelę reikšmę turi erdvinių figūrų vaizdas. Supažindinsime su kai kuriomis vaizdų sudarymo taisyklėmis. Pirmiausia pateiksime figūros lygiagrečiosios projekcijos sąvoką, po to, vartodami ją — figūros atvaizdo sąvoką. Pagaliau išnagrinėsime plokščiųjų ir erdvinių figūrų atvaizdų pavyzdžius.

1. Figūros lygiagrečioji projekcija. Sakykime, π — kuri nors plokštuma, o l — tą plokštumą kertanti tiesė. Pasirinkime bet kurį erdvės tašką A_0. Jei taškas A_0 nėra tiesėje l, tai per A_0 išvesime tiesę, lygiagrečią su tiese l, ir raide A pažymėsime tos tiesės ir plokštumos π susikirtimo tašką (182 pav.). Jei A_0 — tiesės l taškas, tai raide A pažymėsime tiesės l ir plokštumos π susikirtimo tašką. Taškas A vadinamas *taško* A_0 *projekcija plokštumoje* π *projektuojant lygiagrečiai su tiese* l. Paprastai laikoma, kad plokštuma π ir tiesė l žinomos, todėl taškas A trumpai vadinamas *taško* A_0 *lygiagrečiąja projekcija*.

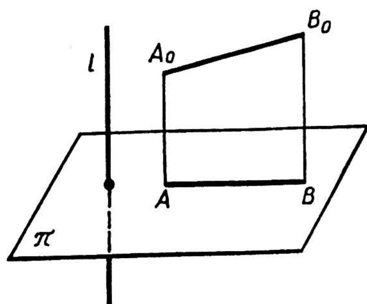
Sakykime, F_0 — plokščioji arba erdvinė figūra. Visų figūros F_0 taškų lygiagrečiosios projekcijos sudaro tam tikrą plokštumos π figūrą F (žr. 182 pav.). Figūra F vadinama *figūros* F_0 *lygiagrečiąja projekcija*. Dar sakoma, kad figūra F gauta iš figūros F_0 *lygiagrečiuoju projektavimu*.



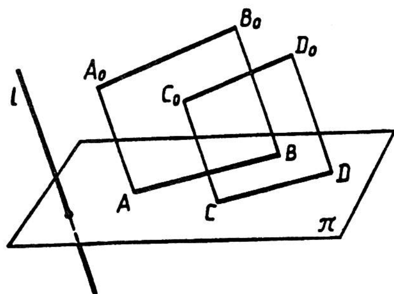
182 pav.



183 pav. Tiesės m_0 projekcija yra tiesė m.



184 pav. Atkarpos A_0B_0 projekcija yra atkarpa AB.



185 pav. Lygiagrečių atkarpų A_0B_0 ir C_0D_0 projekcijos yra lygiagrečios atkarpos AB ir CD.

Suformuluosime pagrindines lygiagrečiojo projektavimo savybes laikydami, kad projektuojamos atkarpos ir tiesės nelygiagrečios su tiese l.

1°. *Tiesės projekcija yra tiesė* (183 pav.).

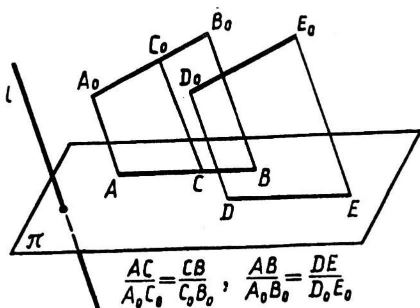
2°. *Atkarpos projekcija yra atkarpa* (184 pav.).

3°. *Lygiagrečiųjų atkarpų projekcijos — lygiagrečiosios atkarpos* (185 pav.), *arba atkarpos, esančios vienoje tiesėje.*

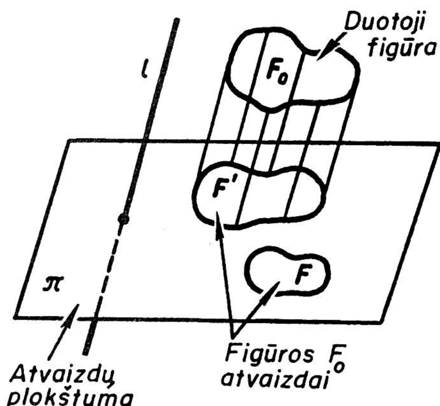
4°. *Lygiagrečiųjų atkarpų projekcijos bei vienoje tiesėje esančių atkarpų projekcijos proporcingos pačioms atkarpoms* (186 pav.).

Iš 4° savybės išplaukia, kad *atkarpos vidurio projekcija yra atkarpos projekcijos vidurys.*

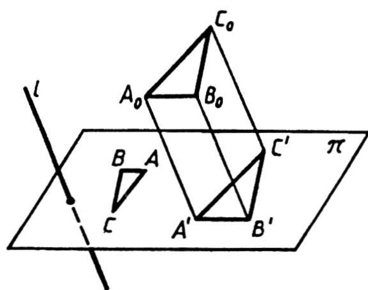
2. Figūros vaizdavimas. Kurią nors plokštumą π pavadinkime *projekcijų plokštuma.* Po to pasirinkime tiesę l, kertančią plokštumą π, ir nagrinėjamą figūrą F_0 suprojektuokime į plokštumą π lygiagrečiai su tiese l. Gautą plokščiąją figūrą F' arba kiekvieną į ją panašią figūrą F plokštumoje π vadinsime *figūros F_0 atvaizdu* (187 pav.). Taip sudarytas figūros atvaizdas atitinka figūros vaizdą, kurį susidarome žiūrėdami į ją iš labai nutolusio taško.

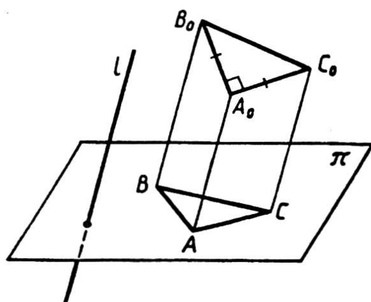


186 pav.



187 pav.





188 pav. *a)* *b)*

Parinkdami įvairias vaizdo plokštumas ir įvairias projektavimo kryptis (t. y. įvairias tieses l), gausime skirtingus nagrinėjamos figūros vaizdus. Dažniausiai parenkamas vaizdesnis figūros atvaizdas, kuriame paprasčiau atlikti papildomus brėžimus.

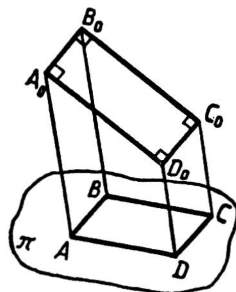
Toks atvaizdas ir pateikiamas paveiksle.

3. Plokščiųjų figūrų vaizdavimas. Figūrų atvaizdų sudarymas pagrįstas 1 skyrelyje suformuluotomis lygiagrečiojo projektavimo savybėmis. Išnagrinėsime keletą plokščiųjų figūrų vaizdavimo pavyzdžių.

Atkarpa. Remiantis 2° savybe, atkarpos projekcija yra atkarpa, todėl atkarpos atvaizdas yra atkarpa. Aišku, kad *kiekvieną atkarpą brėžinyje galima laikyti duotos atkarpos atvaizdu.*

Nagrinėdami trikampio, lygiagretainio ir kt. atvaizdus, laikysime, kad tų figūrų plokštumos nelygiagrečios su projektavimo kryptimi (tiese l).

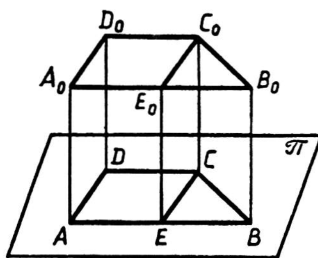
Trikampis. Sakykime, $A_0B_0C_0$ — trikampis, esantis erdvėje, A', B' ir C' — taškų A_0, B_0 ir C_0 projekcijos plokštumoje π (188 pav., *a*). Kadangi atkarpos projekcija yra atkarpa, tai trikampis $A'B'C'$(taip pat į trikampį $A'B'C'$ panašus trikampis ABC) yra trikampio $A_0B_0C_0$ atvaizdas. *Duoto trikampio atvaizdu brėžinyje galima laikyti bet kurį trikampį.* Pavyzdžiui, 188 paveiksle, *b*, stačiojo lygiašonio trikampio $A_0B_0C_0$ atvaizdas yra įvairiakraštis trikampis ABC.



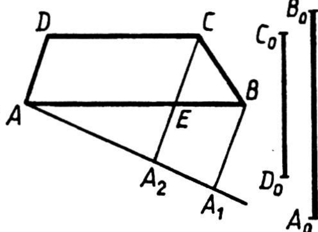
189 pav. $A_0B_0C_0D_0$ — stačiakampis, $ABCD$ — lygiagretainis.

Lygiagretainis. Kadangi lygių lygiagrečiųjų atkarpų projekcijos yra lygios lygiagrečiosios atkarpos (1 skyrelio 3° ir 4° savybės), tai *lygiagretainio atvaizdas yra lygiagretainis.* Kaip ir trikampį, kiekvieną lygiagretainį brėžinyje galima laikyti duoto lygiagretainio atvaizdu (189 pav. — stačiakampio, rombo, kvadrato atvaizdu).

Trapecija. Nesunku suvokti, kad trapecijos $A_0B_0C_0D_0$, kurios pagrindai A_0B_0 ir C_0D_0, atvaizdas yra trapecija $ABCD$, o remiantis 1 skyrelio 4° savybe, galima sakyti, kad

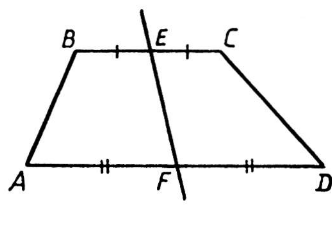


a)



b)

190 pav.



191 pav.

$$\frac{AB}{A_0B_0}=\frac{CD}{C_0D_0}, \tag{1}$$

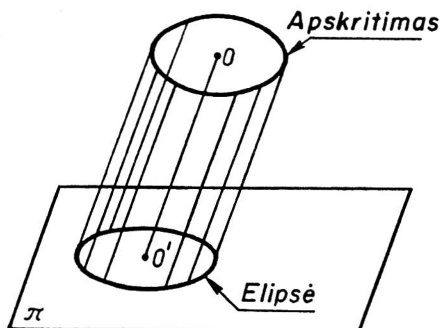
t. y. trapecijos atvaizdo pagrindai proporcingi pačios trapecijos pagrindams. Todėl ne kiekvieną trapeciją galima laikyti duotos trapecijos atvaizdu. Nusakysime trapecijos $A_0B_0C_0D_0$ vaizdo sudarymo būdą. Pirmiausia išnagrinėkime pagalbinę atkarpą C_0E_0, lygiagrečią su atkarpa A_0D_0 ir dalijančią trapeciją į lygiagretainį $A_0D_0C_0E_0$ ir trikampį $B_0C_0E_0$ (190 pav., *a*). Lygiagretainio $A_0B_0C_0E_0$ atvaizdu pasirinkime bet kurį lygiagretainį $ADCE$ (190 pav., *b*). Kadangi $AE = DC$, tai (1) proporciją galima parašyti šitaip:

$$\frac{AB}{A_0B_0}=\frac{AE}{C_0D_0}. \tag{2}$$

Remiantis (2) proporcija, nesunku rasti tašką B — taško B_0 atvaizdą. Tai paaiškinta 190 paveiksle, *b*. Čia $AA_2 = C_0D_0$, $AA_1 = A_0B_0$. Nubrėžtoji trapecija $ABCD$ yra trapecijos $A_0B_0C_0D_0$ atvaizdas (ji tenkina (1) proporciją).

Pabrėžiame, kad lygiašonės trapecijos $A_0B_0C_0D_0$ atvaizdas gali būti ir nelygiašonė trapecija. Tačiau lygiašonės trapecijos simetrijos ašies atvaizdas yra tiesė EF, einanti per pagrindų AD ir BC vidurio taškus. Vadinasi, atkarpa EF yra lygiašonės trapecijos aukštinės atvaizdas (191 pav.).

Apskritimas. Apskritimo lygiagrečioji projekcija vadinama *èlipse* (192 pav.). Apskritimas — atskiras elipsės atvejis, nes jo projekcija plokštumoje, lygiagrečioje su apskritimo plokštuma, yra jam lygus apskritimas (paaiškinkite kodėl). Iš lygiagrečiojo projektavimo savybių išplaukia, kad duoto apskritimo centro O projekcija yra elipsės si-

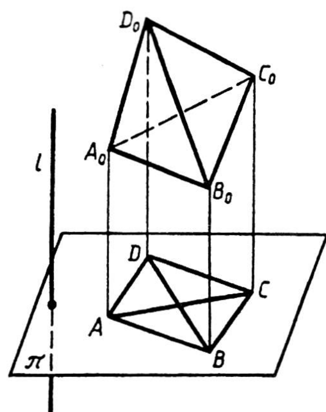


192 pav.

metrijos centras (192 paveiksle taškas O'). Tas taškas vadinamas *elipsės centru*.

Taigi apskritimo atvaizdas yra elipsė, apskritimo centro atvaizdas — elipsės centras.

Elipsė taikoma vaizduojant plokštumoje ritinius, kūgius, nupjautinius kūgius ir sferas (žr. VI ir VII skyrių). Su elipse dažnai susiduriame nagrinėdami įvairius gamtos mokslo klausimus. Pavyzdžiui, planetos skrieja aplink Saulę elipsėms artimomis orbitomis.

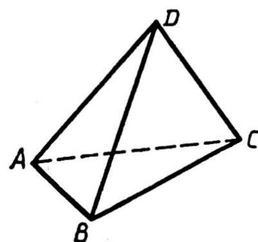


193 pav.

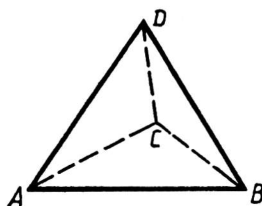
4. Erdvinių figūrų vaizdavimas. Dabar išnagrinėsime kai kurių briaunainių atvaizdus plokštumoje. Laikysime, kad nė viena jų siena nelygiagreti su projektavimo kryptimi. Briaunainio atvaizdu laikysime figūrą, sudarytą iš visų jo briaunų projekcijų.

Tetraedras. Sakykime, $A_0B_0C_0D_0$ — bet kuris tetraedras, A, B, C ir D — jo viršūnių lygiagrečiosios projekcijos atvaizdo plokštumoje (193 pav.). Atkarpos AB, BC, CA, AD, BD, CD yra keturkampio $ABCD$ kraštinės ir įstrižainės. Iš šių atkarpų sudaryta figūra (arba bet kuri į ją panaši figūra) yra tetraedro $A_0B_0C_0D_0$ atvaizdas.

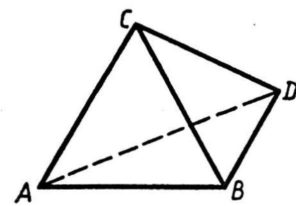
Atitinkamai parinkus atvaizdo plokštumą ir projektavimo kryptį, galima įrodyti, kad figūra, sudaryta iš bet kurio (iškilojo arba neiškilojo) keturkampio kraštinių ir įstrižainių, yra tetraedro atvaizdas (194 pav., *a, b, c*). (Nematomos briaunos pavaizduotos brūkšninėmis linijomis.)



a)



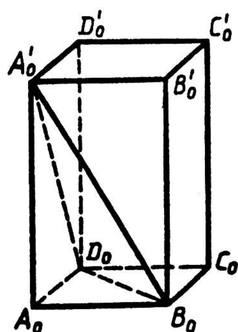
b)

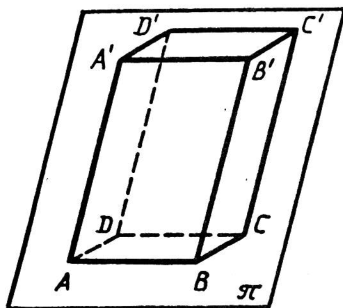


c)

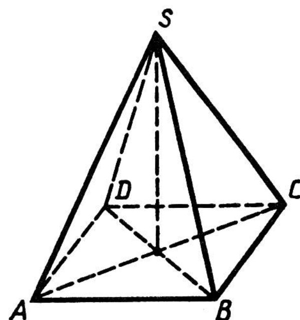
194 pav.

Gretasienis. Sudarykime bet kurio gretasienio $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ atvaizdą. Atkreipiame dėmesį, kad taškai A_0, B_0, D_0 ir A_0' yra tetraedro $A_0B_0D_0A_0'$ (195 pav.) viršūnės, todėl jų atvaizdai gali būti bet kurio keturkampio $ABDA'$ viršūnės. Kitais žodžiais, bet kurias tris atvaizdo plokštumos atkarpas AB, AD ir AA', turinčias bendrą galą A, iš kurių jokios dvi nėra vienoje tiesėje, galima laikyti gretasienio briaunų A_0B_0, A_0D_0 ir A_0A_0' atvaizdais. Tačiau





195 pav.

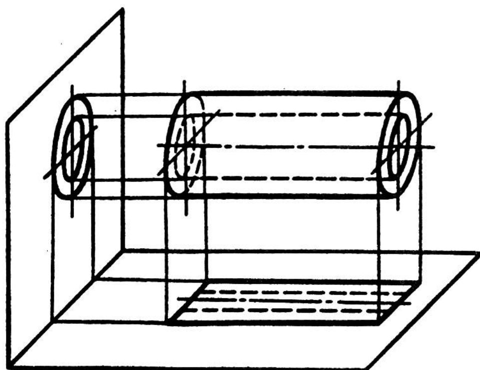


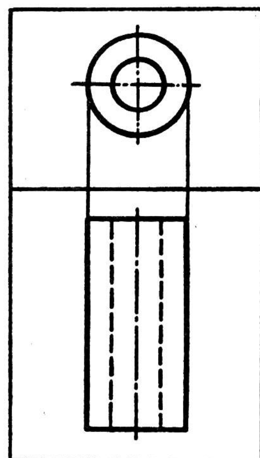
196 pav.

tada kitų briaunų atvaizdai braižomi vienareikšmiškai, nes visos gretasienio sienos yra lygiagretainiai, taigi jų atvaizdai irgi lygiagretainiai. 195 paveiksle gretasienis $ABCDA'B'C'D'$ yra gretasienio $A_0B_0C_0D_0\,A_0'B_0'C_0'D_0'$ atvaizdas.

Piramidė. Piramidės pagrindo atvaizdas braižomas laikantis 3 skyrelyje aprašytų taisyklių, o piramidės viršūnės atvaizdu galima pasirinkti bet kurį tašką, nesantį pagrindo atvaizdo kraštinėje. 196 paveiksle pavaizduota taisyklingoji piramidė $S_0A_0B_0C_0D_0$, kurios pagrindas — kvadratas $A_0B_0C_0D_0$. Jo atvaizdas yra lygiagretainis $ABCD$.

P a s t a b a. Lygiagrečiosios projekcijos atskiras atvejis yra statmenoji projekcija (žr. 21 skyrelį). Su ja susiduriama techninėje braižyboje. Pasirinkta detalė dažnai projektuojama į dvi plokštumas — horizontaliąją ir vertikaliąją, ir abi projekcijos vaizduojamos brėžinio plokštumoje. 197 paveiksle matome cilindrinės įvorės dvi projekcijas.





197 pav.

APIE GEOMETRIJOS AKSIOMAS

Geometrijos aksiomos yra pradiniai teiginiai, kuriais remiantis kuriama visa geometrija, t. y. logiškai samprotaujant atskleidžiamos geometrinių figūrų savybės. Aksiomos išreiškia pirminių geometrijos sąvokų savybes. Šio kurso pirminės sąvokos yra „taškas", „tiesė", „plokštuma", „būti tarp", kai kalbama apie tiesės taškus, ir „uždėjimas". Be to, geometrijos aksiomose ir iš jų išplaukiančiuose teiginiuose vartojamos matematikos bendrosios sąvokos, pavyzdžiui, „priklausyti" („būti"), „aibė", „skaičius" ir t. t.

Čia pateiksime visas geometrijos aksiomas, įskaitant ir tas (taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėties), kurios buvo suformuluotos įvade. Be to, remdamiesi aksiomomis, įrodysime kelis akivaizdžius teiginius, kuriais rėmėmės nagrinėdami stereometrijos kursą.

Pirmoji aksiomų grupė apibūdina taškų, tiesių ir plokštumų tarpusavio padėtį.

1. *Kiekvienoje tiesėje ir kiekvienoje plokštumoje yra taškų.*
2. *Yra mažiausiai trys taškai, nesantys vienoje tiesėje, ir mažiausiai keturi taškai, nesantys vienoje plokštumoje.*
3. *Per bet kuriuos du taškus eina tiesė, tačiau tik viena.*
4. *Per bet kuriuos tris taškus, esančius ne vienoje tiesėje, eina plokštuma, tačiau tik viena.*
5. *Jei du tiesės taškai yra plokštumoje, tai visi tos tiesės taškai yra toje plokštumoje.*
6. *Jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę; toje tiesėje yra visi bendri tų plokštumų taškai.*
7. *Iš trijų tiesės taškų vienas ir tik vienas yra tarp kitų dviejų.*

Kartais pasakymas „taškas B yra tarp taškų A ir C" pakeičiamas kitu — „taškai A ir C yra skirtingose taško B pusėse", arba „taškai A ir B yra vienoje taško C pusėje" (taip pat „taškai B ir C yra vienoje taško A pusėje").

8. *Kiekvienas tiesės taškas O dalija ją į dvi dalis (du spindulius): bet kurie du vieno spindulio taškai yra vienoje taško O pusėje, o bet kurie du skirtingų spindulių taškai — skirtingose taško O pusėse.*

Primename, kad atkarpa *AB* vadinama geometrinė figūra, sudaryta iš taškų *A* ir *B* bei visų tiesės *AB* taškų, esančių tarp jų. Jei atkarpa *AB* ir tiesė *a* yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų, tai sakoma, kad taškai *A* ir *B* yra vienoje tiesės *a* pusėje; jei atkarpa *AB* ir tiesė *a* susikerta kuriame nors taške, esančiame tarp *A* ir *B*, tai taškai *A* ir *B* yra skirtingose tiesės *a* pusėse.

9. *Kiekviena tiesė a, esanti plokštumoje, dalija tą plokštumą į dvi dalis (dvi pusplokštumes): bet kurie du vienos pusplokštumės taškai yra vienoje tiesės a pusėje, o bet kurie du skirtingų pusplokštumių taškai — skirtingose tiesės a pusėse.*

Jei atkarpa ir plokštuma neturi bendrų taškų, tai sakoma, kad atkarpos galai yra vienoje tos plokštumos pusėje; jei atkarpa ir plokštuma kertasi kuriame nors atkarpos vidaus taške, tai sakoma, kad atkarpos galai yra skirtingose plokštumos pusėse.

10. *Kiekviena plokštuma α erdvę dalija į dvi dalis (dvi puserdves): bet kurie du vienos puserdvės taškai yra vienoje plokštumos α pusėje, o bet kurie du skirtingų puserdvių taškai — skirtingose plokštumos α pusėse.*

Laikoma, kad plokštumos α taškai nepriklauso nė vienai nurodytai puserdvei. Plokštuma α vadinama kiekvienos tų puserdvių *kraštu.*

Kitos grupės aksiomose kalbama apie uždėjimą ir figūrų lygumą.

Uždėjimu laikomas erdvės atvaizdis į ją pačią. Tačiau ne kiekvienas. Erdvės atvaizdis į ją pačią, kuriam būdingos 11—17 aksiomose nusakytos savybės, yra uždėjimas. Tų aksiomų formuluotėse vartojama figūrų lygumo sąvoka, kuri apibrėžiama šitaip. Sakykime, F ir F_1 — dvi figūros. *Jei uždėjimu figūra F atvaizduojama į figūrą* F_1, *tai sakoma, kad figūrą F uždėjimu galima sutapdinti su figūra* F_1, *arba kad figūra F lygi figūrai* F_1.

11. *Jei uždedant sutapdinami dviejų atkarpų galai, tai sutapdinamos ir pačios atkarpos.*

12. *Kiekviename spindulyje nuo jo pradžios galima atidėti atkarpą, lygią duotai atkarpai, tačiau tik vieną.*

13. *Nuo kiekvieno spindulio nurodytoje pusplokštumėje galima atidėti kampą, lygų duotam neištiestiniam kampui, tačiau tik vieną.*

14. *Du lygūs kampai hk ir* h_1k_1, *esantys plokštumose, kurios yra puserdvių P ir* P_1 *kraštai, uždėjimu gali būti sutapdinti taip, kad sutaptų puserdvės P ir* P_1; *tai padaryti galima dviem būdais: pirmu sutaps spinduliai h ir* h_1, *k ir* k_1, *o antru — spinduliai h ir* k_1, *k ir* h_1.

15. *Kiekviena figūra lygi jai pačiai.*
16. *Jei figūra F lygi figūrai F_1, tai figūra F_1 lygi figūrai F.*
17. *Jei figūra F_1 lygi figūrai F_2, o figūra F_2 lygi figūrai F_3, tai figūra F_1 lygi figūrai F_3.*

Kitos dvi aksiomos susijusios su atkarpų matavimu. Prieš jas suformuluodami prisiminsime, kaip matuojamos atkarpos. Sakykime, AB — matuojamoji atkarpa, PQ — pasirinktas atkarpų matavimo vienetas. Spindulyje AB atidėkime atkarpą $AA_1 = PQ$, spindulyje A_1B — atkarpą $A_1A_2 = PQ$ ir t. t., kol taškas A_n sutaps su tašku B arba taškas B bus tarp taškų A_n ir A_{n+1}. Pirmuoju atveju sakoma, kad vienetu PQ išmatuotos atkarpos AB ilgis, išreikštas skaičiumi n (arba atkarpa PQ atkarpoje AB išsitenka n kartų). Antruoju atveju galima sakyti, kad vienetu PQ išmatuotos atkarpos AB ilgis apytiksliai išreikštas skaičiumi n. Norint išmatuoti tiksliau, atkarpa PQ dalijama į lygias dalis (dažniausiai į 10) ir viena dalimi jau aprašytu būdu matuojama liekana A_nB. Jei atkarpos PQ dešimtoji dalis matuojamoje atkarpoje neišsitenka sveikąjį skaičių kartų, tai ta dalis irgi dalijama į 10 lygių dalių ir matuojama toliau. Taip galima išmatuoti kiekvieną atkarpą, t. y. pasirinkus matavimo vienetą jos ilgį išreikšti baigtine arba begaline dešimtaine trupmena. Šį teiginį trumpai išreiškia čia pateikiama aksioma.

18. *Pasirinkus atkarpų matavimo vienetą, kiekvienos atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamuoju skaičiumi.*

Pasirenkame duoto ilgio atkarpos egzistavimo aksiomą.

19. *Pasirinkus atkarpų matavimo vienetą, kiekvieną teigiamąjį skaičių atitinka atkarpa, kurios ilgį išreiškia tas skaičius.*

Paskutinė stereometrijos, kaip ir planimetrijos, aksioma yra lygiagrečiųjų tiesių aksioma.

20. *Kiekvienoje plokštumoje per tašką, nesantį duotoje tos plokštumos tiesėje, eina tik viena su duota tiese lygiagreti tiesė.*

Jau įvade minėjome, kad iš geometrijos aksiomų išplaukia, jog planimetrijoje išnagrinėti trikampių lygumo ir panašumo požymiai tinka ir trikampiams, esantiems skirtingose plokštumose. Kaip pavyzdį įrodysime pirmąjį trikampių lygumo požymį.

Sakykime, trikampis ABC yra plokštumoje α, trikampis $A_1B_1C_1$ — plokštumoje α_1 ir $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Įrodysime, kad $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Nepamirškime, kad stereometrijoje trikampį dažniausiai nusako ne tik trys kraštinės, bet ir atitinkama vidaus sritis.

Išnagrinėkime uždėjimą, kuriuo taškas A sutapdinamas su tašku A_1, spindulys AB — su spinduliu A_1B_1, o spindulys AC — su spinduliu A_1C_1. 14-oji aksioma teigia, kad toks uždėjimas tikrai galimas. Kadangi, remian-

tis 12 aksioma, spindulyje A_1B_1 nuo jo pradžios galima atidėti tik vieną atkarpą, lygią atkarpai AB, tai taškas B sutaps su tašku B_1. Dėl tos pačios priežasties taškas C sutaps su tašku C_1. Vadinasi, sutaps atkarpos AB ir A_1B_1, AC ir A_1C_1, BC ir B_1C_1, t. y. sutaps trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ kraštinės (teigiame remdamiesi 11 aksioma).

Įrodysime, kad taip uždedant trikampio ABC vidus sutaps su trikampio $A_1B_1C_1$ vidumi. Dėl to turime įrodyti, kad kiekvienas trikampio ABC vidaus taškas sutaps su trikampio $A_1B_1C_1$ vidaus tašku, ir atvirkščiai: ant trikampio $A_1B_1C_1$ kiekvieno vidaus taško bus uždėtas tam tikras trikampio ABC vidaus taškas. Sakykime, M — trikampio ABC vidaus bet kuris taškas. Per tašką M išveskime atkarpą PQ, kurios galai būtų trikampio ABC kraštinėse AB ir AC. Kadangi kraštinė AB sutampa su kraštine A_1B_1, tai taškas P sutaps su tam tikru kraštinės A_1B_1 tašku P_1. Panašiai taškas Q sutaps su kraštinės A_1C_1 tam tikru tašku Q_1. Remiantis 11 aksioma, galima teigti, kad atkarpa PQ sutaps su atkarpa P_1Q_1, vadinasi, taškas M sutaps su tam tikru atkarpos P_1Q_1 tašku M_1, kitaip sakant, jis bus uždėtas ant trikampio $A_1B_1C_1$ vidaus taško M_1. Šitaip galima įrodyti ir atvirkštinį teiginį: ant trikampio $A_1B_1C_1$ bet kurio vidaus taško bus uždėtas tam tikras trikampio ABC vidaus taškas. Taigi nurodytu uždėjimu trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ sutapdinami, taigi jie lygūs.

Išnagrinėkime dar vieną pavyzdį įrodydami, kad dvi stačiosios trikampės prizmės, turinčios lygius pagrindus ir lygias aukštines, yra lygios.

Primename, kad tokių prizmių lygumu rėmėmės nagrinėdami stačiosios prizmės tūrį (64 skyrelis, 2 išvada).

Sakykime, stačiosios prizmės $ABCDEF$ ir $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ turi lygius pagrindus ABC ir $A_1B_1C_1$ bei lygias aukštines AD ir A_1D_1, be to, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ ir $\angle A = \angle A_1$. Puserdvę, kurios kraštas — plokštuma ABC ir kurioje yra taškai D, E ir F, pažymėkime raide H, o puserdvę, kurios kraštas — plokštuma $A_1B_1C_1$ ir kurioje yra taškai D_1, E_1 ir F_1, pažymėkime H_1.

Išnagrinėkime uždėjimą, kuriuo kampas A sutapdinamas su kampu A_1, spindulys AB — su spinduliu A_1B_1, spindulys AC — su spinduliu A_1C_1, o puserdvė H — su puserdve H_1. Pagal 14 aksiomą toks uždėjimas galimas. Jau anksčiau įrodėme, kad taip uždedant trikampis ABC (t. y. jo kraštinės ir vidus) sutaps su trikampiu $A_1B_1C_1$. Spindulys AD sutaps su tam tikru spinduliu A_1D_2, esančiu puserdvėje H_1, todėl kampai DAB ir DAC sutaps su kampais $D_2A_1B_1$ ir $D_2A_1C_1$. Kadangi kampai DAB ir DAC — statieji, tai ir kampai $D_2A_1B_1$ ir $D_2A_1C_1$ yra statieji. Vadinasi, spindulys A_2D_2 statmenas plokštumai $A_1B_1C_1$, todėl sutampa su spinduliu A_1D_1. Taigi nurodytu uždėjimu spindulys AD sutapdinamas su spinduliu A_1D_1, o kadangi $AD = A_1D_1$, tai taškas D sutampa su tašku D_1. Panašiai įrodytu-

me, kad taškai E ir F sutampa su taškais E_1 ir F_1. Vadinasi, vienos prizmės pagrindas DEF ir šoninės briaunos sutaps su kitos prizmės pagrindu $D_1E_1F_1$ ir šoninėmis briaunomis. Dabar nesunku įrodyti, kad sutaps jų atitinkamos šoninės sienos bei vidaus taškai. Samprotaujame panašiai kaip įrodydami trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ vidaus taškų sutapimą (žr. pirmojo trikampių lygumo požymio įrodymą). Taigi prizmės $ABCDEF$ ir $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sutaps, t. y. jos lygios.

Panašiai galima įrodyti, kad du stačiakampiai gretasieniai, kurių atitinkami matmenys lygūs, yra lygūs, kad dvi taisyklingosios piramidės, kurių pagrindai lygūs ir aukštinės lygios, yra lygios.

ATSAKYMAI IR NURODYMAI

ĮVADAS

3. a) Taip; b) ne; c) ne; d) ne. **5.** Begalinė aibė. **7.** Ne. N u r o d y m a s. Reikia remtis aksioma A_2. **8.** a) Ne; b) taip. **9.** Taip. **10.** a) Taip; b) ne. **12.** Taip. **13.** a) Ne; b) ne; c) taip. **14.** Trys plokštumos, jei tiesės nėra vienoje plokštumoje, ir viena plokštuma, jei tiesės yra vienoje plokštumoje.

I SKYRIUS

17. 26 cm. **18.** a) 3,5 cm; b) 12 cm. **20.** Ne. **27.** 48 cm. **28.** $8\frac{1}{3}$ cm. **29.** 6 cm. **33.** N u r o d y m a s. Sakykime, α, β ir γ — nagrinėjamos plokštumos, a — plokštumų α ir β susikirtimo tiesė. Reikia išnagrinėti tiesės a ir plokštumos γ tarpusavio padėtį. **34.** a), b) Susikerta; c), d) lygiagrečios; e), f) prasilenkiančios. **37.** a) Susikerta; b) prasilenkiančios. **40.** a) Ne; b) taip, tiesė MN. **41.** Ne. **42.** a) Lygiagrečios; b) 100 cm. **44.** a) 40°; b) 45°; c) 90°. **45.** a) 50°; b) 59°. **46.** a) 90°; b) 64°. **49.** Ne. **54.** b) 12 cm^2. **56.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 55 uždaviniu. **57.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 56 uždaviniu. **60.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 58 uždaviniu. **63.** a) $AA_2 = 18$ cm, $AB_2 = 15$ cm; b) $A_2B_2 = 54$ cm, $AA_2 = 72$ cm. **65.** a) Lygiagretainiai. **66.** Tris poras briaunų. **67.** a) $\approx$ 17 cm, $\approx$ 23 cm, $\approx$ 29 cm; b) $\approx$ 146 cm^2, $\approx$ 210 cm^2, $\approx$ 180 cm^2. **72.** N u r o d y m a s. a) Reikia atsižvelgti į tai, kad kertamoji plokštuma eina per tetraedro briaunų DB ir DC vidurio taškus; b) reikia atsižvelgti į tai, kad kertamoji plokštuma tetraedro sienas kerta atkarpomis, lygiagrečiomis su trikampio ABC kraštinėmis. **73.** 22 cm. **74.** b) $\frac{4}{9}$. **75.** b) 6 cm^2. **77.** 8 cm, 10 cm, 12 cm. **79.** a) Lygiagretainis ABC_1D_1; b) lygiagretainis ACC_1A_1. **81.** Tiesių: a) MN ir BC; b) AM ir A_1B_1 susikirtimo taškai. **82.** N u r o d y m a s. Uždavinys sprendžiamas panašiai kaip 14 skyrelio 2 uždavinys. **83.** N u r o d y m a s. Pirma reikia nubrėžti atkarpą, kuria kertamoji plokštuma kerta sieną: a) AA_1D_1D; b) $ABCD$. **84.** N u r o d y m a s. Iš pradžių reikia nubrėžti atkarpą, kuria kertamoji plokštuma kerta sieną $ABCD$. **85.** Lygiagretainis BKD_1L. **86.** N u r o d y m a s. Pirmiausia reikia rasti kertamosios plokštumos ir briaunos DD_1 susikirtimo tašką. **87.** N u r o d y m a s. Visų pirma reikia nubrėžti atkarpą, kuria kertamoji plokštuma kerta: a) sieną BCC_1B_1; b) sieną AA_1D_1D. **88.** b) 12 cm. **90.** Tiesė CD: a) lygiagreti su plokštuma α; b) kerta plokštumą α. **92.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 6 skyrelio 2° savybe. **93.** Tiesės MN ir b prasilenkia. **94.** Taip. **95.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 55 uždaviniu. **98.** Yra tik vie-

na plokštuma. **100.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 7 skyrelio antrąja teorema ir 59 uždaviniu. **102.** $10(2\sqrt{3}+1)$ cm ir $25\sqrt{11}$ cm². **103.** $4\frac{4}{9}$ cm². **108.** N u r o d y m a s. Pirmiausia reikia įrodyti, kad plokštumos ADA_1, BDB_1 ir CDC_1 susikerta tiese. **112.** N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi jo kraštinių kvadratų sumai. **113.** Tiese BD_1.

II SKYRIUS

118. $\angle AOB$, $\angle MOC$ ir $\angle DOA$. **120.** $\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$. **121.** 13 cm. **122.** $KA = KB = 20$ cm, $DA = DB = 32$ cm. **125.** 9 cm. **126.** Statusis. **130.** a) $MA = \sqrt{m^2+n^2}$, $MB = m$, $MC = \sqrt{m^2+n^2}$, $MD = \sqrt{m^2+2n^2}$; b) $\sqrt{m^2+\frac{1}{2}n^2}$, m. **136.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 134 uždaviniu. **138.** a) $\frac{d}{\cos\varphi}$, $d \operatorname{tg} \varphi$; b) $m \cos \varphi$, $m \sin \varphi$. **140.** 3 cm. **141.** 3 cm. **142.** 2,5 cm arba 1,5 cm. **143.** 2 cm. **145.** b) $\sqrt{a^2+b^2}$. **146.** N u r o d y m a s. Reikia remtis trijų statmenų teorema ir jai atvirkštine teorema. **149.** 4 cm ir $4\sqrt{10}$ cm. **150.** a) 2 cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. **152.** 8 dm, 8 dm, $4\sqrt{5}$ dm, $4\sqrt{5}$ dm, 8 dm, $6\sqrt{2}$ dm. **154.** a) 15 cm; b) 75 cm². **155.** 6 cm. **156.** $\sqrt{n^2+m^2\sin^2\varphi}$. **157.** b) 5,1 dm. **158.** 12,5 cm, 12,5 cm, 25 cm, 25 cm. **160.** 12 cm. **161.** N u r o d y m a s. Reikia panaudoti statmenis, nuleistus iš taško A į tieses BC bei BD ir plokštumą CBD. **163.** a) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{d}{2}$; c) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **164.** 60°. **165.** $3d$. **168.** $\frac{d}{\sin\varphi}$. **170.** 1 cm ir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. **171.** 45°. **172.** $6\sqrt{3}$ cm. **173.** 90°, 45° ir 60°. **174.** 60°. **175.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \approx 70°32'$. **176.** $8\sqrt{2}$. **179.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 178 uždaviniu. **180.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 179 uždaviniu. **182.** b) $\sqrt{m^2+n^2}$. **184.** a) $5\sqrt{6}$ cm; b) $5\sqrt{2}$ cm. **187.** a) $\sqrt{6}$; b) 17; c) 13. **188.** $a\sqrt{3}$. **189.** a) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. **190.** a) 90°; b) 45°; c) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi \approx 26°34'$. **192.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **193.** a) $\sqrt{d^2-m^2}$; b) $\sqrt{m^2-n^2}$; c) $\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. **194.** a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **195.** 6 cm, 6 cm ir $6\sqrt{2}$ cm. **198.** 4 cm. **199.** N u r o d y m a s. Sakykime, taškas O — taško S projekcija trikampio plokštumoje. Reikia įrodyti, kad taškas O sutampa su tašku M. **201.** 90°. **202.** $5\sqrt{3}$ cm. N u r o d y m a s. Reikia remtis 199 uždaviniu. **203.** 5 cm. **204.** a) $\frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\varphi}$; b) $\frac{2\pi a}{\operatorname{tg}\varphi}$; c) $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi}$. **205.** 3,5 dm². **206.** 25 cm. **207.** 8 cm. **208.** $9\sqrt{6}$ cm. **209.** Atstumas nuo taško B iki plokštumos α mažesnis už atstumą nuo taško C iki tos plokštumos. **211.** $a\sqrt{2}$. **213.** $\cos \varphi = \frac{1}{3}$, $\varphi \approx 70°33'$. **214.** 60°. **215.** $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ cm. **216.** $2a$. **217.** $2\sqrt{122}$ dm.

219. 13 cm. **220.** 26 cm. **221.** $8\sqrt{21}$ cm². **222.** 45°, 135°, 45°, 135°. **223.** 8 cm ir $8\sqrt{3}$ cm. **224.** $16\sqrt{7}$ cm². **225.** 45°. **226.** $2\sqrt{3}$ cm². **228.** $80\sqrt{2}$ cm². **229.** a) 450 cm² ir ≈ 536 cm²; b) 384 dm² ir 672 dm²; c) 69 dm² ir ≈ 97 dm²; d) 0,2 m² ir ≈ 0,8 m². **230.** 75 cm². **231.** $20(23 + 6\sqrt{3})$ cm². **232.** $2d^2 \sin\varphi\,(\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)} + \sin\alpha)$. **233.** 180 cm². **234.** 580 cm². **235.** $\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$. **236.** N u r o d y m a s. Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad pasvirosios prizmės šoninės sienos yra lygiagretainiai. **237.** 240 cm². N u r o d y m a s. Reikia remtis 236 uždaviniu. **238.** 2016 cm². **239.** $\sqrt{58}$ cm, $\sqrt{58}$ cm, $\sqrt{65}$ cm, $\sqrt{65}$ cm. **240.** 768 cm². **241.** $(2\sqrt{34} + 22)$ m². **242.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $48(\sqrt{2} + 1)$ cm². **243.** 192 cm². **244.** 790 cm². **245.** $8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm². **246.** b) 189 cm². **248.** $48\sqrt{2}$ cm². **250.** $64\sqrt{3}$ cm². **251.** 13 cm. **252.** 12 cm. **253.** 12 cm. **254.** a) $\dfrac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3}$; b) $2\arcsin\dfrac{3a}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}$; c) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}H}{a}$; d) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}H}{a}$; e) $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3H^2+a^2}}{3H}$. **255.** $\dfrac{4}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}}$. **256.** a) $\dfrac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; b) $\dfrac{m}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; c) $\arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$; d) $2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)$. **257.** $3\sqrt{3}(1 + \sqrt{2})h^2$. **258.** $72(1 + \sqrt{7})$ cm². **259.** $3\sqrt{5}$ cm. **263.** a) Trapecija. **264.** $3a^2$. **265.** 54 cm². **266.** 13 dm². **268.** $\sqrt{7}$ dm. **269.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ dm, $\sqrt{3}$ dm. **270.** 16 cm². **276.** a) Vieną; b) neturi; c) neturi; d) vieną. **277.** a) Begalinę aibę; b) tris; c) devynias. **278.** a) Penkias; b) keturias; c) tris arba šešias. **279.** 60°. **280.** Pjūvio, einančio per gretimų sienų įstrižaines, plotas lygus $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Pjūvio, einančio per priešingų sienų įstrižaines, plotas lygus $a^2\sqrt{2}$. **281.** $\sqrt{3}$. **282.** 90°. **283.** a) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$; b) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{9}$. **284.** Taisyklingasis oktaedras. **286.** a) $m = \dfrac{\sqrt{6}}{2}h$; b) $n = \dfrac{1}{3}m$. **287.** a) $a\sqrt{2}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$; c) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **290.** $2\sqrt{2}l^2\dfrac{\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta}\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)}$. **291.** $2d^2 \times \sin\varphi\,(\cos\theta + \sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)})$. **292.** 4,8 cm. **294.** $4\sqrt{S_0^2-a^4}$ arba $2\sqrt{2S_0}$. **296.** $\dfrac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. N u r o d y m a s. Reikia atsižvelgti į tai, kad ieškomasis pjūvis yra trapecija. **298.** $2a^2 + 2a\sqrt{4b^2-a^2}$. **299.** 0,5 m. **300.** Stačiakampis, $S = \dfrac{ab}{4}$. **301.** $4\sqrt{6}$ cm. **302.** 5 cm, 5 cm, 6 cm, 6 cm. **303.** $288(3 + \sqrt{3})$ cm². **305.** $2h^2 \operatorname{tg}\alpha$. **306.** $4h^2 \operatorname{tg}^2\varphi \times$

$\times\left(1+\dfrac{1}{\sin\varphi}\right)$. **307.** a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab$. **308.** 4 cm, 4 cm, 4 cm, 4 cm. **309.** $\dfrac{80}{3}$ dm^2. **310.** 540 cm^2. **311.** a) 315 cm^2; b) 7,2 cm. **312.** tg φ cos $\dfrac{180^\circ}{n}$. **313.** 54 dm^2. **314.** 56 cm, 24 cm. **319.** Tris.

IV SKYRIUS

320. a) 3 cm, 4 cm, 5 cm, 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm; b) 4 cm, 3 cm, 5 cm, 2 cm, 2,5 cm. **321.** a) 12 cm, 8 cm, 9 cm; b) 15 cm, $\sqrt{145}$ cm, 17 cm. **323.** a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$; b) kvadratas. **324.** a) Taip; b) ne; c) ne. **325.** a) Lygiagrečios arba sutampa; b) tiesė lygiagreti su plokštuma arba yra joje; c) plokštumos lygiagrečios, susikerta arba sutampa. **326.** a) $\overrightarrow{CC_1}$; b) $\overrightarrow{DK}$; c) $\overrightarrow{A_1C_1}$; d) $\overrightarrow{C_1B_1}$; e) $\overrightarrow{MB_1}$. **327.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AC_1}$; c) $\overrightarrow{C_1B}$; d) $\overrightarrow{DB_1}$; e) $\overrightarrow{DC_1}$. **329.** a) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$; b) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$; c) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; d) $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$. **333.** a) $\vec{0}$; b) $\overrightarrow{DB}$. **335.** a) $\overrightarrow{PQ}$; b) $\overrightarrow{AK}$; c) $\overrightarrow{CP}$; d) $\vec{0}$. **336.** a) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}$; c) $-(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC})$. **337.** a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OE}$; b) $\overrightarrow{AK}$; c) $\vec{0}$. **338.** N u r o d y m a s. Reikia atkreipti dėmesį, kad $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1}$. **339.** a) $\overrightarrow{C_1B}$; b) $\overrightarrow{AC}$. **340.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{CB}$; c) $\overrightarrow{BC}$. **344.** a) –1; b) 2; c) $-\dfrac{1}{2}$. **345.** a) $-2\overrightarrow{EF}$; b) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. **346.** $-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$. **347.** a) $5\vec{n} - 9\vec{m}$; b) $2\vec{p} - 13\vec{m} - 3\vec{n}$. **355.** a), c). **356.** Taip. **358.** a) $\overrightarrow{AC_1}$; b) $\overrightarrow{DB_1}$; c) $\overrightarrow{DB_1}$; d) $\overrightarrow{A_1C}$; e) $\overrightarrow{BD_1}$. **359.** a) $-\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$, $\dfrac{\sqrt{2}kq}{2a^3}\overrightarrow{AC_1}$; b) $\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}}$, $\dfrac{2kq}{9a^2}\sqrt{105}$; $\dfrac{4kq}{3a^2}$. **360.** a) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$; b) $\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D_1}$. **361.** $\overrightarrow{CD} = 0\cdot\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{D_1O} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. **363.** $\overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$. **364.** $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $|\overrightarrow{AK}| = \dfrac{3}{2}m$. **365.** $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$, $\dfrac{3}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$. **367.** $\overrightarrow{DK} = 0{,}7\overrightarrow{DA} + 0{,}15\overrightarrow{DB} + 0{,}15\overrightarrow{DC}$. **368.** a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{C_1N} = -\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; d) $\overrightarrow{A_1N} = 0\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; e) $\overrightarrow{MD} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. **369.** $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. **370.** a) $\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$; b) $\overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{4}\vec{c}$; c) $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$; d) $\overrightarrow{MK} = \dfrac{1}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{12}\vec{b} - \dfrac{1}{12}\vec{c}$. **371.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 350 ir 366 uždaviniu. **373.** Ne. N u r o d y m a s. Pirma reikia įrodyti, kad M_1 — trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas, o po to remtis 366 uždaviniu. **379.** a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AB}$; c) $\vec{0}$. **380.** a) $\overrightarrow{AD_1}$; b) $\overrightarrow{AC_1}$; c) $\overrightarrow{DB}$. **381.** N u r o d y-

m a s. Pirmiausia reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C_1A_1}$. **382.** a) k — bet kuris skaičius; b) $k \geq 0$; c) $k < 0$; d) $k = -1$. **386.** N u r o d y m a s. Visų pirma reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$. **387.** a) $3\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM}$; b) $2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$; c) $k\overrightarrow{ON} + (1-k)\overrightarrow{OM}$. **389.** N u r o d y m a s. Pirmiausia reikia įrodyti vektorių $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ ir $\overrightarrow{A_3B_3}$ komplanarumą. **390.** a) $\frac{3}{2a^2}kq$; b) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}kq$; c) $\frac{4}{9a^2}kq$; d) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}kq$. **391.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. **392.** $\overrightarrow{AC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{CA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{BD_1} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$; $\overrightarrow{DB_1} = -\vec{q} + \vec{p} + \vec{r}$. **393.** a) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; b) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$. **394.** $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **395.** N u r o d y m a s. Pirma reikia įrodyti vektorių $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ ir $\overrightarrow{CC_1}$ komplanarumą. **396.** $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$. **397.** $\frac{1}{3}$. **398.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 366 uždaviniu. **399.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 397 uždaviniu.

V SKYRIUS

400. a) C; b) E; c) B; d) A, C, E, H; e) B, E, G; f) B, C, D. **402.** B_1 (1; 0; 1), C (0; 1; 1), C_1 (1; 1; 1), D_1 (1; 1; 0). **403.** $\vec{a}\{3; 2; -5\}$, $\vec{b}\{-5; 3; -1\}$, $\vec{c}\{1; -1; 0\}$, $\vec{d}\{0; 1; 1\}$, $\vec{m}\{-1; 0; 1\}$, $\vec{n}\{0; 0; 0{,}7\}$. **409.** a) {7; –2; 1}; b) {–7; 2; –1}; c) {5; –1,2; 1}; d) $\left\{-5\frac{1}{3}; 3\frac{2}{5}; -1\frac{1}{7}\right\}$; e) $\left\{\frac{1}{3}; -2{,}2; \frac{1}{7}\right\}$; f) {7; –1,8; 1}; g) {7; –2,2; 1}; h) {10; –2; 2}; i) {6; –3; 0}; k) {0; –1,2; 0}; l) $\left\{\frac{1}{9}; -\frac{4}{5}; \frac{1}{21}\right\}$; m) {–0,4; 0,2; 0}. **410.** $\vec{p}\{4; -18; -9\}$, $\vec{q}\{5; 15; -5\}$. **411.** a) {0; 5; –1}; b) {–3; 2; 1}; c) {7,8; 2,5; 4,1}; d) {–3; 9; –3}. **412.** $-\vec{i}\{-1; 0; 0\}$, $-\vec{j}\{0; -1; 0\}$, $-\vec{k}\{0; 0; -1\}$, $-\vec{a}\{-2; 0; 0\}$, $-\vec{b}\{3; -5; 7\}$, $-\vec{c}\{0{,}3; 0; -1{,}75\}$. **413.** c) Ne; d) taip; e) ne. **414.** a) $m = 10$, $n = 1\frac{1}{5}$; b) $m = 0{,}1$, $n = -2$. **415.** a) Taip; b) ne; c) taip; d) ne; e) ne. **418.** a) {–1; 0; 2}; b) {5; –7; 2}; c) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$. **419.** $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = -5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. **420.** Taip. **421.** b) Taip; c) ne. **422.** a) Taip; b) ne; c) taip. **423.** N u r o d y m a s. Reikia remtis 366 uždaviniu. **424.** a) M (–1; 2,5; –2); b) B (–8; 4; –19); c) A (–24; 8; 28). **425.** a) $m = 2$, $n = -5$; b) $m = -0{,}5$, $n = 2$; c) $m = 1$, $n = -1$; d) $m = 2$, $n = -1$. **426.** a) 3; b) 17. **427.** $|\vec{a}| = 5\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$, $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{m}| = \sqrt{5}$. **428.** a) $\sqrt{6}$; b) $2\sqrt{14}$; c) 0; d) $5\sqrt{2}$; e) $3\sqrt{14}$; f) 14; g) $\sqrt{326}$. **429.** $\sqrt{14}$. **430.** a) $3 + 2\sqrt{2}$; b) 0,5; $\frac{\sqrt{73}}{4}$; $\frac{\sqrt{73}}{4}$. **431.** a) Taisyklingasis; b) statusis

įvairiakraštis; c) statusis įvairiakraštis; d) statusis lygiašonis. **432.** a) 4, 4, 3; b) $4\sqrt{2}$, 5, 5. **433.** (0; 2; –3), (–1; 2; 0), (–1; 0; –3). **434.** (3; 0; 0), (0; –4; 0), (0; 0; $\sqrt{7}$). **435.** 3,75; 2; 4; $1 - 2\sqrt{2}$ ir $1 + 2\sqrt{2}$. **436.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad: a) taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje; b) $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{DC}$ — nelygūs vienakrypčiai vektoriai; c) $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$. **437.** a) (–1,6; 0; 0); b) (0; 8; 0); c) (0; 0; 1). **438.** a) $\left(\frac{3}{8}; \frac{17}{8}; 0\right)$; b) $\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$; c) $\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{17}{6}\right)$. **439.** a) (2; 3; 0), $\sqrt{13}$; b) (2; 3; –1). **440.** $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + m^2}$. **441.** a) 45°; b) 135°; c) 60°; d) 45°; e) 90°; f) 90°; g) 0°; h) 180°. **442.** $\widehat{\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{DC}} = \varphi$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{CD}} = \widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DC}} = 180° - \varphi$. **443.** a) a^2; b) $-2a^2$; c) 0; d) a^2; e) a^2; f) $-\frac{a^2}{2}$; g) $-\frac{3}{2}a^2$. **444.** $\vec{a}\,\vec{c} = 3$, $\vec{a}\,\vec{b} = 0$, $\vec{b}\,\vec{c} = 3$, $\vec{a}\,\vec{a} = 6$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}} = \sqrt{3}$. **445.** a) –10; b) 3; c) 1; d) –4; e) 28. **446.** a) Bukasis; b) smailusis; c) statusis. **448.** a) 5,5; b) 3,5; c) 4. **449.** $m = 4$. **450.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$. **451.** a) 60°; b) 135°; c) 150°; d) 45°; e) 90°. **452.** $\widehat{\vec{a}\,\vec{i}} \approx 50°46'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}} \approx 63°26'$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{k}} \approx 50°46'$. **453.** 60°. **454.** $\angle A = 120°$, $\angle B = \angle C = 30°$, $P = 2\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})$, $S = 2\sqrt{3}$. **455.** a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) 0. **456.** 90°. **457.** 3. **459.** a) 1, $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$. **461.** Nurodymas. Vektorius $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{BC}$ reikia išreikšti vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. **462.** a) –1; b) –1,5; c) 4; d) $\sqrt{2}$; e) 2; f) $-\frac{1}{4}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **464.** a) 30°; b) 60°; c) 0°; d) 45°. **466.** a) $\frac{3}{\sqrt{29}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{58}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{87}}$; d) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$. **467.** a) $\approx 71°34'$; b) $\approx 59°44'$. **468.** a) $\frac{3}{\sqrt{70}}$; b) $\frac{9}{\sqrt{130}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{182}}$. **469.** a) $\frac{10}{\sqrt{134}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{134}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{134}}$. **470.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{2}{3}$. **471.** Nurodymas. Sakykime, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — duotasis kubas. Reikia, pavyzdžiui, įrodyti, kad $AC_1 \perp A_1B$. Vektorius $\overrightarrow{AC_1}$ ir $\overrightarrow{A_1B}$ reikia išreikšti vektoriais $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$ ir įrodyti, kad $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0$. **473.** 60°. **475.** $\frac{1}{3}\sqrt{70 + 15\sqrt{2}}$. **476.** 45°. **477.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. **479.** Nurodymas. Reikia nagrinėti plokštumą, einančią per simetrijos centrą ir duotąją tiesę; gausime planimetrijos uždavinį (žr. „Geometrija VII—IX klasei“ 1149 uždavinį). **481.** Nurodymas. Reikia remtis šiomis judesių savybėmis: judesiu tiesė atvaizduojama į tiesę, lygiagrečios tiesės — į lygiagrečias tieses, kampas — į jam lygų kampą. **484.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad lygiagretusis postūmis yra judesys, todėl lygiagrečiuoju postūmiu tiesė atvaizduojama į tiesę. **485.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AA_1} = \vec{p}$. **487.** Nurodymas. Įrodoma kaip: a) planimetrijos 114 skyrelio teorema; b) sprendžiamas planimetrijos 1150 uždavinys. **488.** Nurodymas. a), b) Įrodyti prieštaros metodu. **490.** a) {3; 9; –24}; b) {–1,6; –2,3; 4,3}. **491.** a) Ne; b) taip; c) taip; d) ne. **492.** a) (–1;

0; 0); b) (0; –2; 0), (0; 0; 2). **493.** a) Taip; b) taip; c) ne. **494.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad: a) taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje; b) atkarpų AC ir BD vidurio taškai sutampa. **495.** $\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$. **496.** C (6; 5; 5), D_1 (9; 4; 1), B_1 (4; 7; 4), C_1 (8; 8; 4). **497.** a) 1; b) –2; c) 0. **498.** $\left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}; 0\right\}$. **499.** 4 arba –4. **500.** 1. **501.** $2\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{29}$. **502.** (0; 42,4; 0). **503.** (1; 1,5; 1,5). Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad $\angle ACB = 90°$. **504.** 6 dm. **505.** Nurodymas. Reikia parinkti koordinačių sistemą ir duotojo tetraedro viršūnių koordinates pažymėti šitaip: A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$, C $(x_3; y_3; z_3)$, D $(x_4; y_4; z_4)$. Atsižvelgti į tai, kad pusiaukraštinių susikirtimo taško koordinatės yra $\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}; \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}; \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$. **506.** a) 3; b) –3,5; c) 5; d) 7; e) –10. **507.** a) 135°; b) 60°; c) 67°30′. **508.** a) Taip; b) taip; c) taip; d) ne. **509.** a) $\frac{2}{\sqrt{114}}$; b) $\frac{5}{9}$. **510.** a) 90°; b) ≈ 114°06′. **511.** a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{2}$. **512.** a) $\frac{7}{65}$; b) $\frac{5}{13}$; c) $\frac{4}{13}$; d) $\frac{3}{13}$. **513.** a) $\frac{2}{\sqrt{38}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{38}}$. **515.** 45°. **516.** sin θ cos φ. **517.** $\sqrt{n^2+m^2+p^2+pn}$. **518.** Nurodymas. a) Reikia įrodyti prieštaros metodu; b) sakykime, M — tiesės a ir plokštumos α susikirtimo taškas, A — tiesės a taškas, B ir C — plokštumos α taškai, nesutampantys su tašku M. Trikampiams AMB ir AMC reikia taikyti Pitagoro teoremą. **519.** Nurodymas. Išnagrinėkite plokštumų α ir β, α ir β_1 sudaromų dvisienių kampų tiesinius kampus. **520.** Nurodymas. Plokštumoje α reikia pasirinkti dvi susikertančias tieses ir pasinaudoti 484 uždaviniu.

VI SKYRIUS

521. 5 m. **522.** a) 24 cm; b) $12\sqrt{3}$ cm; c) 432π cm². **523.** a) $10\sqrt{2}$ cm; b) 50π cm². **524.** Ne. **525.** $\sqrt{5\pi}$ m. **526.** a) 30°; b) 60°. **527.** a) 5 dm; b) 3 cm. **529.** 64 cm². **530.** 8 cm. **531.** 15 dm. **532.** $\frac{1}{\cos\varphi}$. **533.** $\sqrt{S^2-4h^2d^2}$. **534.** $2\sqrt{3}\,dh$. **535.** 40 cm². **536.** $S\sqrt{2}$. **537.** π² m². **538.** $\frac{S}{\pi}$. **539.** 1,125π kg. **540.** 6 cm, 18 cm. **541.** 0,82π ≈ 2,58 m². **542.** $4S \times \operatorname{ctg}\varphi$. **543.** $S_{\text{šon.}} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$, $S_{\text{rit.}} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ arba $S_{\text{rit.}} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + \frac{1}{2\pi}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$. **544.** $\frac{d^2}{8\pi}$. **545.** a) $2a^2$; b) $2\pi a^2$; c) $4\pi a^2$. **546.** b) $\frac{b}{a}$. **547.** 17 cm. **548.** a) 108π cm²; b) 72π cm²; c) 36π cm². **549.** a) $4\sqrt{2}$ dm; b) 4 dm. **550.** 25 cm². **551.** a) r^2; b) $r^2\sqrt{2}$; c) $r^2\sqrt{3}$. **552.** $2h^2$. **553.** $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ dm. **554.** a) $\frac{r\sqrt{4l^2-r^2}}{4}$; b) $\frac{r\sqrt{2l^2-r^2}}{2}$. **555.** a) 200 cm²; b) $\frac{100}{3}\sqrt{6}$ cm²; c) $\frac{200\sqrt{3}}{9}$ cm². **558.** α = 216°. **559.** 180°. **560.** a) 60°; b) 2 arcsin $\frac{1}{4}$; c) 2 arcsin $\frac{1}{6}$. **561.** 9π cm², $6\sqrt{2}$ cm. **562.** $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ cm². **563.** 0,9π cm².

564. $\dfrac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$. **565.** $S_{šon.} = 80\pi$ cm², $S_{k.} = 144\pi$ cm². **566.** $2\pi m^2 \sin\varphi$. **567.** 5 cm. **568.** a) 8 cm; b) 128 cm². **569.** $R^2 - r^2$. **570.** 60 cm². **571.** $33\sqrt{2}\,\pi$ cm², $(33\sqrt{2} + 65)\pi$ cm². **572.** $2{,}55\pi \approx 8{,}011$ kg. **574.** a) $10\sqrt{21}$ cm; b) 12 mm; c) 16 dm; d) $\sqrt{a^2-b^2}$. **575.** $\dfrac{\sqrt{4R^2-m^2}}{2}$. **576.** a) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; c) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$. **577.** a) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 54$; b) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$; c) $x^2 + y^2 + z^2 = 35$. **578.** a) (0; 0; 0), 7; b) (3; –2; 0), $\sqrt{2}$. **579.** a) (2; 0; 0), 2; b) (0; 1; 0), 5; c) (–1; 0; 0), 2; d) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1\right)$, $\sqrt{6}$. **580.** 1600π dm². **581.** 12 cm. **582.** 6 cm. **583.** 4 cm. **584.** 3 cm. **585.** 8 cm. **586.** a) Plokštuma yra sferos liečiamoji plokštuma; b), c) plokštuma kerta sferą; d) plokštuma ir sfera neturi bendrų taškų. **587.** a) 80π cm²; b) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ cm. **588.** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$; b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}R^2$. **589.** a) $2\sqrt{3}\,\pi$ cm; b) $5\sqrt{2}\,\pi$ m. **590.** $\pi R^2\sin^2\varphi$. **591.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **592.** 1 cm. **593.** a) 144π cm²; b) 16π dm²; c) 8π m²; d) 48π cm². **594.** 36 m². **595.** $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ cm. **597.** 10 m. **598.** 900π cm². **599.** $4\pi\,(r_1^2 + r_2^2)$. **601.** $\frac{\sqrt{3}S}{2}$. **602.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **604.** $\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}}$. **605.** a) $\frac{3}{2}$; b) 2 arba $\frac{5}{4}$. **606.** $\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **607.** $\frac{p}{2}$ ir $\frac{p}{4}$. **608.** 414π cm². **610.** $-\frac{1}{3}$. **611.** $\frac{\sqrt{S_0^2-S_1^2}}{\pi}$. **612.** $\arccos\frac{1}{7}$. **613.** $4\sqrt{6}$ cm². **614.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **615.** $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **616.** $40\sqrt{3}\,\pi$ cm². **617.** a) $\frac{9\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{73}+3\right)$ cm²; b) $(18 + 6\sqrt{41})$ cm²; c) $\frac{9}{2}\left(\sqrt{91}+3\sqrt{3}\right)$ cm². **618.** $12\sqrt{10}\,\pi$ dm², $4(3\sqrt{10} + 5)\pi$ dm². **620.** a) Nurodymas. Reikia įrodyti, kad sferos skersmuo lygus trikampio įžambinei; b) $2\sqrt{10}$ cm. **622.** (3; 0; 0), (0; 0; –9), (0; 0; –1). **623.** $4\sqrt{2}$. **625.** b) $0{,}6R$. **626.** a) $2R\sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$, $4R\sin\varphi \times \sqrt{\frac{3-4\sin^2\varphi}{3}}$; b) $\frac{16}{9}\pi R^2\sin^2\varphi\,(3 - 4\sin^2\varphi)$. **627.** $\frac{240}{13}\pi$ cm. **630.** $\frac{4\sqrt{10}+4\sqrt{17}+8}{15\pi}$. **631.** a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(29+7\sqrt{73}\right)$ cm²; b) $(58 + 14\sqrt{41})$ cm²; c) $\frac{21\sqrt{91}+87\sqrt{3}}{2}$ cm². **634.** a) $24R^2$; b) $12\sqrt{3}R^2$; c) $24\sqrt{3}R^2$. **635.** a) $\dfrac{4R^2\cos\alpha}{(1-\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$; b) $100\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})$ cm². **636.** Nurodymas. Reikia išnagrinėti piramidės pjūvį, gautą perkirtus ją plokštuma, einančia per pagrindo kraštinės vidurį ir statmena tai kraštinei. **639.** a) $8R^2$; b) $\frac{21\sqrt{3}}{4}R^2$; c) $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$. **640.** $\frac{3\sqrt{5}-1}{4\sqrt{33}}a$, $\frac{2\sqrt{33}}{11}a$. **641.** $4\sqrt{3}$ cm, 6 cm arba $4\sqrt{2}$ cm, 8 cm. **642.** $\frac{2}{3}$.

643. a) $R\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)$; b) $r\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}\right)$; c) 60°. **644.** $\frac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$. **645.** $\frac{3}{4}$. **646.** a) $R\sin\varphi$; b) $\frac{r}{\sin\varphi}$; c) 30° arba 150°.

VII SKYRIUS

647. a) $V = V_1 + V_2$; b) $V = \frac{2}{3}V_1 + V_2$. **648.** a) 1980; b) 300; c) $1170\sqrt{3}$; d) $3{,}2\sqrt{5}$. **649.** a) $432\sqrt{2}$ cm³; b) $6\sqrt{6}$ m³; c) $0{,}32\sqrt{5}$ cm³. **650.** 12 cm. **651.** 3,51 kg. **652.** $240\sqrt{2}$ cm³. **653.** $729\sqrt{2}$ cm³. **654.** $\frac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$. **655.** $ab\sqrt{3a^2-b^2}$. **656.** $432\sqrt{3}$ cm³. **657.** a) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ m³; b) $1728\sqrt{2}$ cm³. **658.** 2310 cm³. **659.** a) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm³; b) $1{,}5\sqrt{2}$. **660.** $0{,}5m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$. **661.** $\frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **662.** $\frac{Q^2\sin 2\beta}{2a}$. **663.** a) $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$; b) a^3; c) $1{,}5\sqrt{3}a^3$; d) $\frac{2a^3}{\mathrm{tg}\,22°30'}$. **664.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **665.** 72 cm³. **666.** a) 24π cm³; b) $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ cm; c) 2 cm. **667.** ≈ 208 m. **668.** ≈ 1513 t. **669.** $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$. **670.** ≈ 61 kg. **671.** a) $3\sqrt{3} : 4\pi$; b) $2 : \pi$; c) $3\sqrt{3} : 2\pi$; d) $2\sqrt{2} : \pi$; e) $\left(\frac{1}{2}n\sin\frac{360°}{n}\right):\pi$. **672.** $\frac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}$. **673.** 0,5. **674.** $\frac{\pi}{2}$. **675.** $\frac{\pi}{5}$. **676.** $192\sqrt{3}$ cm³. **677.** $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. **678.** $\frac{1}{4}m^3\ \mathrm{tg}\,\varphi$. **679.** 1050 cm³. **680.** $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$. **681.** $V = 18\sqrt{39}$ cm³. **683.** 1080 cm³. N u r o d y m a s. Reikia remtis 682 uždaviniu. **684.** a) 6 m³; b) 4950 cm³. **685.** $169\sqrt{3}$ cm³. **686.** a) $\frac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\varphi \times \cos\varphi$; b) $\frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3-4\cos^2\alpha}$; c) $\frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **687.** $\frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}$. **688.** a) $\frac{4H^3}{3\mathrm{tg}^2\beta}$; b) $\frac{m^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$. **689.** $\frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\sin\varphi$. **690.** $6\sqrt{471}$ cm³, $6\sqrt{498}$ cm². **691.** $\frac{845\sqrt{3}}{6}$ cm³. **692.** $\frac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}\ \mathrm{tg}\,\varphi$. **693.** $\mathrm{arctg}\frac{12V}{b^3\sin\alpha}$. **694.** 9 cm³. **695.** a) $\frac{1}{24}c^3 \times \sin 2\varphi\ \mathrm{tg}\,\theta$; b) 48 cm³; c) $\frac{1}{6}abc$. **696.** $1400\sqrt{3}$ cm³. **697.** $\frac{7\sqrt{47}a^3}{192}$. **698.** $\frac{1}{24}(m^3-n^3) \times \mathrm{tg}\,\varphi$. **699.** 1260 dm³. **700.** $38\sqrt{2}$ cm³. **701.** a) $2{,}25\pi$ cm³; b) 9 cm; c) $\sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$.

702. 375 cm^3. **703.** $\frac{\sqrt{\pi Q(P^2-Q^2)}}{3\pi}$. **704.** $\frac{1}{12}\pi H^3$. **705.** 240π cm^3 arba 100π cm^3. **706.** 216°. **707.** $\frac{225\pi}{7}$ dm^3. **708.** 84π m^3. **709.** $\frac{Sh}{\pi l}$, $\frac{1}{12}\pi h\left(l^2-h^2+\frac{3S^2}{\pi^2 l^2}\right)$. **710.** a) 64π cm^2, $\frac{256}{3}\pi$ cm^3; b) ≈ 3 cm, ≈ 36π cm^2; c) 4 cm, $\frac{256}{3}\pi$ cm^3. **711.** Žemės tūris 64 kartus didesnis už Mėnulio tūrį. **712.** $H=\frac{4}{3}R$; čia H — ritinio aukštinė, R — rutulio spindulys. **713.** Ne. **714.** Vandens lygis pakils $\frac{32}{75}$ cm. **715.** $\frac{942}{125}\pi$ m^3. **716.** 5 : 16. **717.** 58 500π cm^3 arba 504 000π cm^3. **718.** $\frac{52}{81}\pi R^3$. **719.** 252π cm^3 ir 720π cm^3. **720.** 112 500π cm^3. **721.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}\pi R^3$. **722.** $6375^2\pi \approx 1{,}28\cdot 10^8$ km^2 = $128\cdot 10^6$ km^2. **723.** $432\pi \approx 1357$ cm^2. **725.** $\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3}$, 36 dm^3. **726.** $48\sqrt{11}$ cm^3. **727.** $a\sqrt{Q^2-Qa^2}$. **728.** 105 cm^3. **729.** $16\sqrt{11}$ cm^3. **730.** $\frac{a^3}{4}$. **731.** 1 m, 2 m, 5 m, 3 m, 3 m, 3 m. **732.** $\frac{1}{3}d^3\times \sin^2\varphi\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$ arba $\frac{1}{3}d^3\sin^2\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}$. **733.** N u r o d y m a s. Trikampę prizmę papildykite iki gretasienio. **734.** N u r o d y m a s. Pasinaudokite 733 uždaviniu. **735.** 6,12 dm^3. N u r o d y m a s. Pasinaudokite 682 uždaviniu. **736.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{27\sin^2\varphi\cos\varphi}$. **737.** $\frac{16m^3}{3\operatorname{tg}^2\varphi}$. **738.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h^3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)$. **739.** $\frac{a^3n}{24\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}\times\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}}$. **740.** $\frac{2h^3\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{3\operatorname{tg}^2\varphi_3}$. **741.** $\frac{2H^3\sin\alpha}{3\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$. **742.** $\frac{1}{3}a^3\times\sin^2\varphi\operatorname{tg}\theta$. **743.** a) $\frac{a}{12}\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}$; b) $\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$. **744.** 31 : 73. **745.** a) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; b) $\frac{\pi h^3}{4}$; c) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **747.** ≈ 7065 l. **748.** $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}$. **749.** $\frac{a^3\pi}{24}\sin^3\varphi\operatorname{tg}\theta$. **750.** $\frac{3}{2}$. **751.** 96π dm^3. **752.** $2\pi r\frac{l-r}{l}$. **753.** $\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$. **754.** $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot V$. **755.** $\frac{\pi}{6}a^3\times\sin^3\alpha\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}$. **756.** $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. **757.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **758.** $\frac{\pi}{H^2}(H^2+r^2)^2$, $\frac{\pi}{6H^3}(H^2+r^2)^3$. **759.** $\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ cm^2, $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ cm^3. **760.** $\frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ cm^2, $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ cm^3. **761.** ≈ 6,56 m. **762.** Rutulio tūris didžiausias, kūgio tūris mažiausias. **763.** a) Ne; b) taip. N u r o d y m a s. Rutulį laikyti vienalyčiu, jo tankį palyginti su vandens tankiu.

764. Apskritimas, esantis su tomis tiesėmis lygiagrečioje plokštumoje. Jo spindulys lygus $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$ (čia h — atstumas tarp duotų prasilenkiančiųjų tiesių), o apskritimo centras nuo kiekvienos duotų tiesių nutolęs per atstumą $\frac{h}{2}$. **765.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad visi pjūviai yra lygiagretainiai, kurių perimetrai lygūs dvigubai briaunai. **766.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad keturkampis, kurio viršūnės — priešingų briaunų vidurio taškai, yra lygiagretainis, ir pritaikyti formulę, siejančią lygiagretainio kraštines ir įstrižaines. **767.** Visi trikampio kampai turi būti smailieji. **768.** Apskritimas (be taško A), esantis tiesei BC statmenoje plokštumoje; statmuo AD tiesei BC yra to apskritimo skersmuo. **769.** Nurodymas. Sakykime, tetraedro viršūnės projekcija yra pagrindo aukštinių susikirtimo taškas. Tada kiekviena tetraedro briauna statmena priešingai briaunai. Po to reikia taikyti teoremą, atvirkštinę trijų statmenų teoremai. **770.** Nurodymas. Reikia atsižvelgti į tai, kad O_1 — trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas. **771.** Nurodymas. Reikia remtis 770 uždaviniu. **772.** Septynios. **773.** Nurodymas. Per duoto dvisienio kampo tiesinio kampo pusiaukampinę bei dvisienio kampo briauną reikia išvesti plokštumą, tos plokštumos ir nagrinėjamos tiesės susikirtimo tašką suprojektuoti į dvisienio kampo sienas, po to remtis gautų trikampių lygumu. **775.** Nurodymas. Sakykime, A — bet kuri kubo viršūnė, O — kubo centras, A_1 — taško A projekcija duotoje tiesėje. Tada $AA_1 = OA \cdot \sin \varphi$ (φ — kampas tarp OA ir OA_1). Reikia užrašyti atstumų nuo tiesės OA_1 iki kubo viršūnių kvadratų sumą ir taikyti kosinusų teoremą. **776.** Nurodymas. Minimi tetraedrai turi bendrą viršūnę, o jų pagrindai — lygiašoniai statieji trikampiai, kurių statiniai lygūs kubo briaunai. **777.** Nurodymas. Išnagrinėkite kubo išklotinę. **778.** Nurodymas. Angos ašimi pasirenkama kubo įstrižainė. **779.** $\frac{25}{16}S$. **780.** $\sqrt{2}$ cm. Nurodymas. Tetraedras turi būti apie kubą apibrėžtos sferos viduje. **781.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad visos gauto briaunainio viršūnės yra kubo sienų vidurio taškai. **782.** Nurodymas. Pasirenkama kuri nors gretasienio siena, mažiausias prie jos esantis kubas ir išsiaiškinama, kaip prie jo gali būti pridėti kiti kubai. **783.** Nurodymas. Laužtės viršūnes reikia suprojektuoti į tris kubo briaunas, turinčias bendrą viršūnę, ir pasinaudoti trikampio kraštinių ryšiais. **784.** Nurodymas. Nuo duoto briaunainio, turinčio f sienų, k briaunų ir e viršūnių, paviršiaus atskyrę vienos sienos vidų, gausime daugiasienį paviršių P_1. Po to atskyrę tą paviršiaus P_1 sieną, kuri turi kraštinę briauną (t. y. briauną, kuri yra tik vienos sienos kraštinė), gausime daugiasienį paviršių P_2. Paviršiuje P_2 liko tos atskirtos sienos viršūnės ir briaunos, kurios priklauso kitoms sienoms. Tęsdami šį procesą po s ($1 < s < f$) žingsnių gausime paviršių P_s. Taikant matematinės indukcijos metodą sienų skaičiui, reikia įrodyti, kad $f_S + e_S - k_S = 1$; čia $f_S = f - s$, k_S ir e_S — paviršiaus P_S sienų, briaunų ir viršūnių skaičius. Atkreipkite dėmesį į štai ką: kai $f_S = 1$, t. y. kai $s = f - 1$, lygybė akivaizdi, nes tada $k_S = e_S$. Kai $s = 1$, gaunama norima lygybė $(f - 1) + e - k = 1$. **785.** Nurodymas. Reikia remtis simetrija. **786.** Nurodymas. Remiamasi simetrija. **787.** $\sqrt{\frac{3}{7}}a$, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **788.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **789.** Nurodymas. Įstrižainių nusakomus vektorius reikia išreikšti vektoriais, kuriuos nusako briaunos. **790.** Nurodymas. Reikia išnagrinėti vektorius, nusakančius krintančiojo ir atsispindėjusio spindulio kryptis. **791.** Du sprendiniai: 45° ir 135°. **792.** Nurodymas. Tarę, kad M — tetraedro $ABCD$ aukštinių susikirtimo

taškas, visus vektorius išreikškite vektoriais, išeinančiais iš vienos tetraedro viršūnės, pavyzdžiui, vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Visus sąlygos duomenis išreikškite vektoriais. **793.** Nurodymas. Reikia išnagrinėti vektorių, su šoninėmis briaunomis sudarantį lygius kampus, ir įrodyti, kad jis statmenas vektoriams, kuriuos nusako pagrindo briaunos. **794.** Nurodymas. Sakykime, O_1 — taško O projekcija plokštumoje ABC. Reikia įrodyti, kad $\overrightarrow{O_1A} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. **795.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad tas dydis lygus rutulio skersmens kvadratui. **796.** Rutulio viduje esantis apskritimo lankas, kurio skersmuo lygus atstumui nuo rutulio centro iki duotos tiesės, o apskritimo plokštuma statmena tai tiesei. **797.** Sfera, kurios centras sutampa su duotos sferos centru, o spindulys lygus $\frac{\sqrt{6}}{2}R$; čia R — duotos sferos spindulys. **799.** $r_3 \geq \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$; čia r_3 — mažiausiojo rutulio spindulys. **800.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. **801.** $\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)-\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}R$, kai $\lambda \neq 2$; $\frac{\sqrt{3}}{6}R$, kai $\lambda = 2$. **802.** $\frac{1}{12}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{1}{4}V$, $\frac{5}{12}V$; čia V — prizmės tūris. **803.** Nurodymas. Tetraedrą papildyti iki trikampės prizmės ir pasinaudoti 733 uždaviniu. **804.** Nurodymas. Reikia įrodyti, kad gauti tetraedrai turi bendrą pagrindą ir lygias aukštines. **805.** 5 : 3. **806.** Nurodymas. Pagrindu pasirinkus kurią nors sieną, kurioje yra briauna AB, reikia įsitikinti, kad nei jo plotas, nei tetraedro aukštinė nepriklauso nuo taškų C ir D padėties. **807.** $\frac{5}{24}$ cm^3. Nurodymas. Reikia remtis 803 uždaviniu. **808.** Nurodymas. Pasirinkite pjūvio vidaus tašką A ir padalykite briaunainį į piramides, turinčias bendrą viršūnę A. **809.** $\frac{16}{3}$ cm^3. Nurodymas. Reikia išnagrinėti figūros pjūvius, gautus ją perkirtus plokštumomis, lygiagrečiomis su ritinių ašimis. **810.** $2 \arcsin\frac{1}{3}$. **812.** $\frac{\pi a^3}{12}\left(3\,\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. **813.** $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. **814.** Nurodymas. Tašką H pasirinkus pradžia, reikia nagrinėti tetraedro viršūnių vietos vektorius. **815.** Nurodymas. Taikyti vektorius ir pasinaudoti 814 uždaviniu.

DALYKINĖ RODYKLĖ

TURINYS

II SKYRIUS

TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

§ 1. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS STATMENUMAS

§ 2. STATMUO IR PASVIROSIOS. KAMPAS TARP TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

§ 3. DVISIENIS KAMPAS. PLOKŠTUMŲ STATMENUMAS

III SKYRIUS

BRIAUNAINIAI

§ 1. BRIAUNAINIO SĄVOKA. PRIZMĖ

§ 2. PIRAMIDĖ

§ 3. TAISYKLINGIEJI BRIAUNAINIAI

IV SKYRIUS

VEKTORIAI ERDVĖJE

§ 1. VEKTORIUS ERDVĖJE

§ 2. VEKTORIŲ SUDĖTIS IR ATIMTIS. VEKTORIAUS DAUGYBA IŠ SKAIČIAUS

§ 3. KOMPLANARIEJI VEKTORIAI

V SKYRIUS

KOORDINAČIŲ METODAS ERDVĖJE

§ 1. TAŠKO KOORDINATĖS IR VEKTORIAUS KOORDINATĖS

§ 2. VEKTORIŲ SKALIARINĖ DAUGYBA

§ 3. JUDESIAI

VI SKYRIUS

RITINYS, KŪGIS IR RUTULYS

§ 1. RITINYS

§ 2. KŪGIS

§ 3. SFERA

VII SKYRIUS

KŪNŲ TŪRIAI

§ 1. STAČIAKAMPIO GRETASIENIO TŪRIS

§ 2. STAČIOSIOS PRIZMĖS IR RITINIO TŪRIS

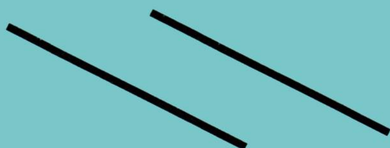
Levonas Atanasianas, Valentinas Butuzovas, Sergejus Kadomcevas ir kt.
GEOMETRIJA
Vadovėlis X—XII klasei

Redaktorė *Nijolė Ramanauskienė*
Viršelis *Vlado Oržekausko*

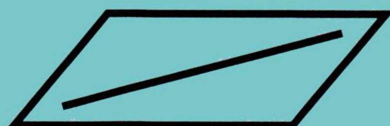
Rinko ir maketavo „Šviesos“ leidykla

1999 05 11. 13,02 + 0,4 priešl. leidyb. apsk. l.
Tir. 5000 egz. Leid. Nr. 13 966. Užsak. Nr. 780.
Akcinė bendrovė leidykla „Šviesa“, Vytauto pr. 25, 3000 Kaunas.
Spausdino SPAB spaustuvė „Aušra“, Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas.
Sutartinė kaina

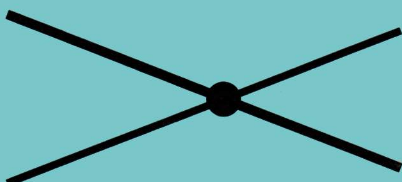
TIESIŲ IR PLOKŠTUMŲ TARPUSAVIO PADĖTIS ERDVĖJE



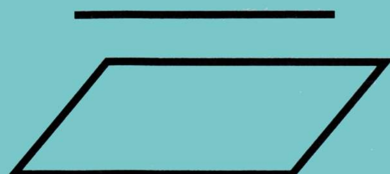
Lygiagrečios tiesės



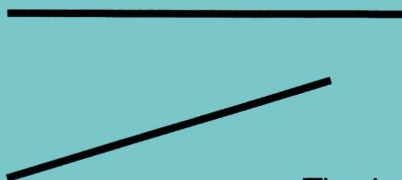
Tiesė yra plokštumoje



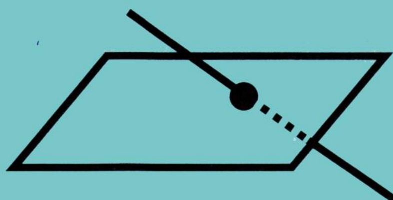
Tiesės susikerta



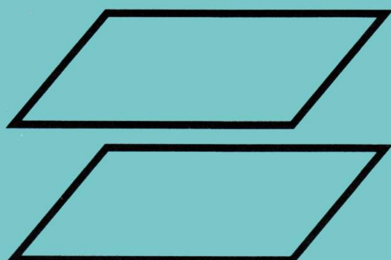
Tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios



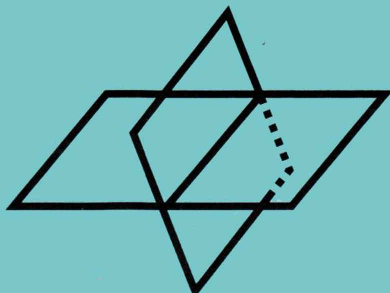
Tiesės prasilenkia



Tiesė ir plokštuma susikerta



Lygiagrečios plokštumos



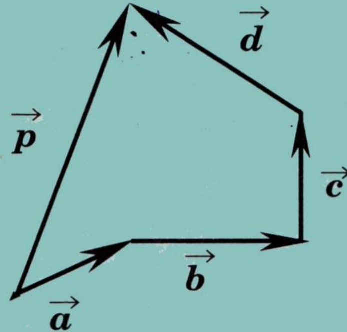
Plokštumos susikerta

VEKTORIAI ERDVĖJE

Vektorių sudėtis

Daugiakampio taisyklė

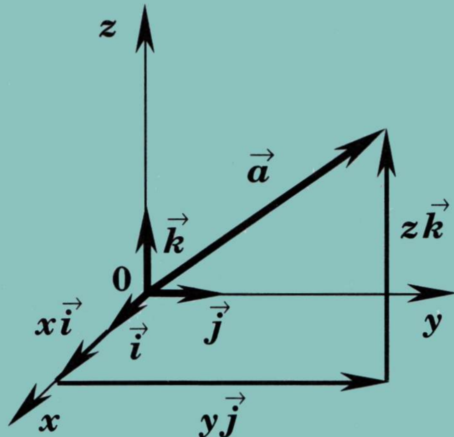
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{p}$



Vektoriaus koordinatės

$\vec{a}\{x; y; z\} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

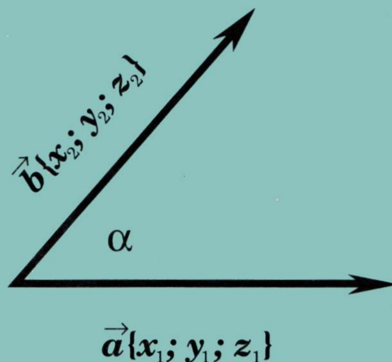
$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



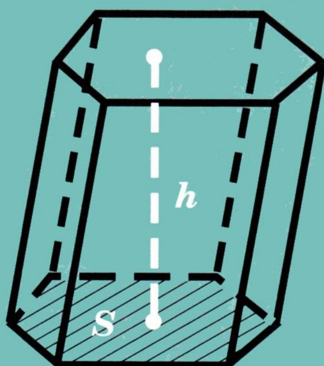
Vektorių skaliarinė sandauga

$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha =$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$



BRIAUNAINIŲ TŪRIAI



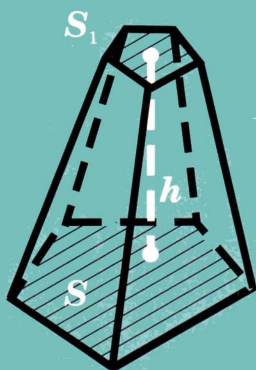
Prizmės tūris

$V = Sh$



Piramidės tūris

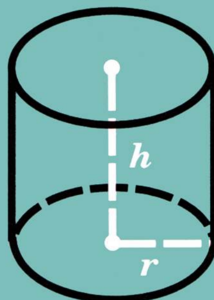
$V = \frac{1}{3}Sh$



Nupjautinės piramidės tūris

$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$

SUKINIŲ PAVIRŠIŲ PLOTAI IR TŪRIAI

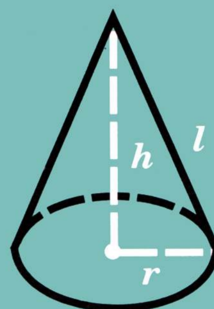


Ritinio šoninio paviršiaus plotas

$S_{šon.} = 2\pi rh$

Ritinio tūris

$V = \pi r^2 h$

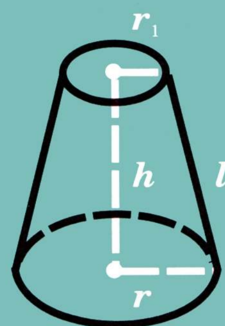


Kūgio šoninio paviršiaus plotas

$S_{šon.} = \pi rl$

Kūgio tūris

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

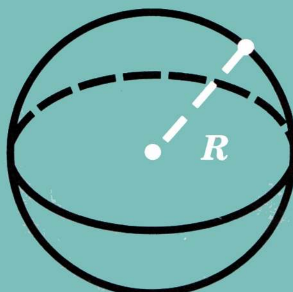


Nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotas

$S_{šon.} = \pi(r + r_1)l$

Nupjautinio kūgio tūris

$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r_1^2 + rr_1)$



Sferos plotas

$S = 4\pi R^2$

Rutulio tūris

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$











ISBN 5-430-02794-4